第五章

不确定推理

前言

- 【传统逻辑的系统】
  - “硬”计算
  - 要求使用确定的和精确的数据及知识；
- 【解决实际问题】
  - 人的认识常常是不确定的或不精确的；
    - 模糊性；
    - 近似性；
  - 不能以简单的真假逻辑加以表示；

前言

- 不确定推理
  - 模仿人作近似而非严格推理的“软”计算技术；
- 不确定推理在确定性推理方法的基础上发展起来
  - 使用不确定的和不精确的数据及知识；
  - 把指示确定性程度的数据附加到数据及知识；
- 3种不确定推理方法（不同的确定性程度定义）：
  - 5.3 主观Bayes方法
  - 5.4 可信度方法
  - 5.5 证据理论

- 常识(common sense)具有不确定性。
  - 一个常识可能有众多的例外，一个常识可能是一种尚无理论依据或者缺乏充分验证的经验。
- 常识往往对环境有极强的依存性。
  - “鸟是会飞的”，“常在河边走，哪能不湿鞋”。

5.1 概述

知识的不确定性

- 智能主要反映在求解不确定性问题的能力上。
- 推理是人类的思维过程，它是从已知事实出发，通过运用相关的知识逐步推出某个结论的过程。
- 其中已知事实和知识是构成推理的两个基本要素。
  - 已知事实（证据），用以指出推理的出发点及推理时应使用的知识；
  - 知识是推理得以向前推进，并逐步达到最终目标的依据。

- 在客观世界中，由于事物发展的随机性和复杂性，人类认识的不完全、不可靠、不精确和不一致性，自然语言中存在的模糊性和歧义性，使得现实世界中的事物以及事物之间的关系极其复杂，带来了大量的不确定性。
- 大多数要求智能行为的任务都具有某种程度的不确定。
- 不确定性可以理解为在缺少足够信息的情况下做出判断。

- 确定性推理是建立在经典逻辑基础上的
- 经典逻辑的基础之一就是集合论
- 这在很多实际情况中是很难做到的，如高、矮、胖、瘦就很难精确地分开。
- 经典逻辑不适合用来处理不确定性。

- 不确定推理是建立在非经典逻辑基础上的一种推理，它是对不确定性知识的运用与处理。
- 不确定性推理就是从不确定性初始证据出发，通过运用不确定性的知识，最终推出具有一定程度的不确定性但却是合理或者近乎合理的结论的思维过程。

5.1.2 不确定推理要解决的基本问题

- 由于证据和规则的不确定性，导致了所产生的结论的不确定性。
- 不确定性推理反映了知识不确定性的动态积累和传播过程，推理的每一步都需要综合证据和规则的不确定因素，通过某种不确定性测度，寻找尽可能符合客观实际的计算模式，通过不确定测度的传递计算，最终得到结果的不确定测度。

- 在专家系统中，不确定性表现在证据、规则和推理三个方面，需要对专家系统中的事实与规则给出不确定性描述，并在此基础上建立不确定性的传递计算方法。
- 要实现对不确定性知识的处理，要解决
  - 不确定知识的表示问题
  - 不确定信息的计算问题
  - 不确定性表示
  - 计算的语义解释问题

1. 表示问题

- 表示问题指的是采用什么方法描述不确定性。通常有数值表示和非数值的语义表示方法。数值表示便于计算、比较；非数值表示，是一种定性的描述。
- 在专家系统中的“不确定性” 分为：
  - 规则的不确定性
  - 事实的不确定性

(1) 规则不确定性 (E→H, f(H, E)),

(2) 证据不确定性 (E, C(E)),

- 证据不确定性的表示方法应与知识不确定性的表示方法保持一致，证据的不确定性通常也是一个数值表示，它代表相应证据的不确定性程度，称之为动态强度。

它表示相应知识的不确定性程度，称为知识或规则强度。

它表示证据E为真的程度。它有两种来源：初始证据 (由用户给出)；前面推出的结论作为当前证据 (通过计算得到)。

2. 计算问题

- 计算问题主要指不确定性的传播与更新，即获得新信息的过程。
- 它是在领域专家给出的规则强度和用户给出的原始证据的不确定性的基础上，定义一组函数，求出结论的不确定性度量。
- 它主要包括如下三个方面：

(1)不确定性的传递算法

已知规则的前提E的不确定性C(E)和规则强度f（H，E)，求假设H的不确定性C(H)，

即定义函数f1，使得：

$$C(H)=f1(C(E),f(H,E))$$

(2)结论不确定性合成

即已知由两个独立的证据E1和E2,求得的假设H的不确定性度量C1(H)和C2(H)，求证据E1和E2的组合导致的假设H的不确定性C(H)，即定义函数f2,使得:

C(H)=f2(C1(H),C2(H))

(3)组合证据的不确定性算法

已知证据E1和E2的不确定性度量C(E1)和C(E2)，求证据E1和E2的析取和合取的不确定性，即定义函数f3和f4使得：

$$C(E1 \wedge E2)=f3(C(E1),C(E2))$$

$$C(E1 \vee E2)=f4(C(E1),C(E2))$$

常用组合证据的不确定性的计算方法有3种。

(a)最大最小法

$$C(E1 \wedge E2)=\min(C(E1), C(E2))$$

$$C(E1 \vee E2)=\max(C(E1), C(E2))$$

(b)概率方法

$$C(E1 \wedge E2)=C(E1) \times C(E2)$$

$$C(E1 \vee E2)= C(E1)+C(E2)-C(E1) \times C(E2)$$

(c)有界方法

$$C(E1 \wedge E2)=\max\{0, C(E1)+C(E2)-1\}$$

$$C(E1 \vee E2)=\min\{1, C(E1)+C(E2)\}$$

3. 语义问题

- 语义问题指上述表示和计算的含义是什么。如C(H,E)可理解为当前提E为真时，对结论H为真的一种影响程度，C(E)可理解为E为真的程度。
- 处理不确定性问题的主要数学工具：
  - 概率论
  - 模糊数学
- 概率论与模糊数学所研究和处理的是两种不同的不确定性。

- 概率论研究和处理随机现象，事件本身有明确的含义，只是由于条件不充分，使得在条件和事件之间不能出现决定性的因果关系(随机性)。
- 模糊数学研究和处理模糊现象，概念本身就没有明确的外延，一个对象是否符合这个概念是难以确定的（属于模糊的）。
- 无论采用什么数学工具和模型，都需要对规则和证据的不确定性给出度量。

- 规则的不确定性度量f(H，E)，需要定义在下述3个典型情况下的取值：

  若E为真，则H为真，这时f(H，E)=?

  若E为真，则H为假，这时f(H，E)=?

  E对H没有影响，这时f(H，E)=?

- 对于证据的不确定性度量C(E)，需要定义在下述3个典型情况下的取值：

  E为真，C(E)=?

  E为假，C(E)=?

  对E一无所知，C(E)=?

- 对于一个专家系统，一旦给定了上述不确定性的表示、计算及其相关的解释，就可以从最初的观察证据出发，得出相应结论的不确定性程度。
- 专家系统的不确定性推理模型指的就是证据和规则的不确定性的测度方法以及不确定性的组合计算模式。

5.1.3 不确定性推理方法分类

- 两种不确定性推理：
- 在推理一级上扩展不确定性推理的方法（模型方法）

把不确定证据和不确定的知识分别与某种量度标准对应起来，并且给出更新结论不确定性算法，从而建立不确定性推理模式。

- 在控制策略级处理不确定性的方法（ 控制方法）

通过识别领域中引起不确定性的某些特征及相应的控制策略来限制或减少不确定性对系统产生的影响，这类方法没有处理不确定性的统一模型，其效果极大地依赖于控制策略。

- 模型方法分为：

  数值方法　　非数值方法

数值方法，对不确定性的一种定量表示和处理方法。如概率方法(本章内容)

如古典逻辑方法和非单调推理方法等

- 纯概率方法虽然有严格的理论依据，但通常要求给出事件的先验概率和条件概率，而这些数据又不易获得，因此使其应用受到限制。
- 为了解决这个问题，人们在概率论的基础上发展起来了一些新的方法和理论，主要有
- 可信度方法、
- 证据理论、
- 主观概率论（又称主观Bayes方法）等。

(1) 主观Bayes方法

(2) 可信度方法

(3) 证据理论

PROSPECTOR专家系统中使用的不确定推理模型，是对Bayes公式修正后形成的一种不确定推理方法，为概率论在不确定推理中的应用提供了一条途径。

它是MYCIN专家系统中使用的不确定推理模型，它以确定性理论为基础，方法简单、易用。

它通过定义信任函数、似然函数，把知道和不知道区别开来。这些函数满足比概率函数的公理要弱的公理，因此，概率函数是信任函数的一个子集。

- 基于概率的方法没有把事物自身所具有的模糊性反映出来。
- Zadeh提出模糊集理论。
- 概率论处理的是由随机性引起的不确定性，可能性理论处理的是由模糊性引起的不确定性。

5.3 主观Bayes方法

- 处理不确定性的**主要理论基础**：
  - 传统概率论中的**Bayes理论**；

5.3 主观Bayes方法

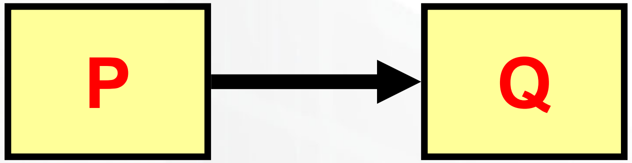
- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - 先验概率
    - 表示为p(事件)；
    - 在没有知识支持它的出现或不出现的情况下赋给这个事件的概率；
    - 即，先于证据的概率；
  - 后验概率
    - 表示为p(事件/证据)；
    - 给定一些证据的条件下这个事件发生的概率；

推理规则P⇒Q的不确定性表示为后验概率p(Q/P)

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (1)后验概率
    - Bayes理论有以下条件概率公式★：

$$\boxed{p(Q/P)}=\frac{\boxed{p(P/Q)}\bullet p(Q)}{p(P)} \quad ①$$



  - 其中：
    - $p(P)$——前提P的先验概率；
    - $p(Q)$——结论Q的先验概率；
    - $p(P/Q)$——后验概率
      - 结论Q成立时前提P成立的概率；
  - 后验概率$p(P/Q)$比后验概率$p(Q/P)$更容易获取
    - 由等式①获得后验概率$p(Q/P)$ ；

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (1)后验概率

病状 → 疾病

- P——症状，如，患有头疼的人；
- Q——疾病，如，脑膜炎病人；
- p(Q/P)——带有症状P的人患疾病Q的后验概率；
- p(P/Q)——患疾病Q的人带有症状P的后验概率；

先验概率p(P)

p(P)=0.001

$$p(Q/P)=\frac{\boxed{p(P/Q)}\bullet p(Q)}{p(P)}=0.09$$

p(P/Q)=0.9

p(Q)=0.0001

先验概率p(Q)

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理

征兆 → 原因

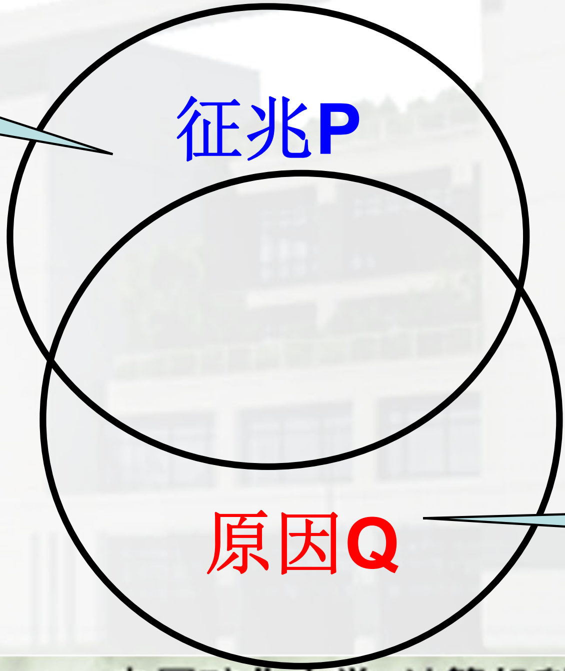
  - (1)后验概率
    - P——征兆（病症），汽车轮子发出刺耳的噪声；
    - Q——原因（疾病），汽车刹车失调；
    - 后验概率p(Q/P)；

$$p(Q/P)=\frac{\boxed{p(P/Q)}\bullet p(Q)}{p(P)}$$

=0.88

先验概率p(P)

p(P)=0.04



p(P/Q)=0.7

p(Q)=0.05

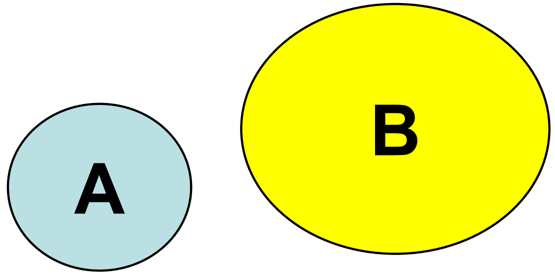
先验概率p(Q)

5.3 主观Bayes方法

- 处理不确定性的**主要理论基础**：
  - 传统概率论中的**Bayes理论**；
- 应用**Bayes理论**获得**确定性程度*p*(Q|P)**：
  - 收集**大量的样品事件**来统计*p*(P) *p*(Q) *p*(P|Q)；
- 【问题——同类事件出现的频率不高】：
  - 无法作客观概率统计，获取其**客观概率**；
    - 如，“某地发生地震”的概率；

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - 概率公式：
      - 加法原理：事件A和事件B不相容



$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(A) + p(B)$$

$$p(Q) = p(Q \cap (P \cup \neg P)) = p(\boxed{(Q \cap P)} \cup \boxed{(Q \cap \neg P)})$$

$$\Downarrow$$

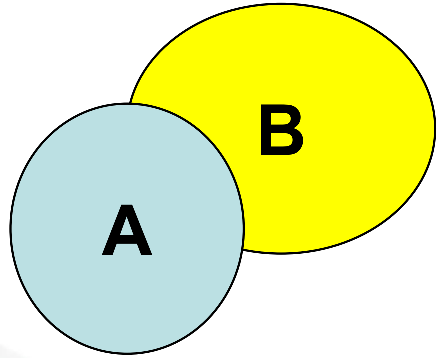
$$p(Q) = p(Q \cap P) + p(Q \cap \neg P)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p(Q) = p(Q, P) + p(Q, \neg P)}$$

5.3 主观Bayes方法

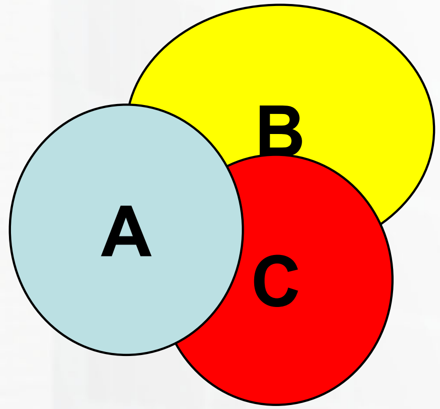
- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - 概率公式：
      - 乘法原理：



$$p(AB) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$$

扩展形式

$$p(ABC) = p(A/BC)p(B/C)p(C)$$



5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法

$$p(Q/P)=\frac{p(P/Q)\bullet p(Q)}{\boxed{p(P)}}$$

- 先验概率p(P)比先验概率p(Q)更难获得；
- 对Bayes理论进行改进，消去先验概率p(P)；

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - 对Bayes理论进行改进，消去先验概率*p*(P)；

$$p(Q/P)=\frac{p(P/Q)\bullet p(Q)}{\boxed{p(P)}} \quad ①$$

$$p(\neg Q/P)=\frac{p(P/\neg Q)\bullet p(\neg Q)}{p(P)} \quad ②$$

5.3 主观Bayes方法

- **1、应用Bayes理论于不确定推理**
  - (2)主观Bayes方法
    - 对Bayes理论进行改进，消去先验概率*p*(P)；

$$p(Q/P)=\frac{p(P/Q)\bullet p(Q)}{\boxed{p(P)}} \qquad ①$$

$$p(\neg Q/P)=\frac{p(P/\neg Q)\bullet p(\neg Q)}{\boxed{p(P)}} \qquad ②$$

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}=\frac{p(P/Q)\bullet p(Q)}{p(P/\neg Q)\bullet p(\neg Q)}$$

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - 对Bayes理论进行改进，消去先验概率**p(P)**；

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}=\frac{p(P/Q)\bullet \boxed{p(Q)}}{p(P/\neg Q)\bullet \boxed{p(\neg Q)}}$$

$$O(Q)=\frac{p(Q)}{p(\neg Q)}=\boxed{\frac{p(Q)}{1-p(Q)}}$$

命题Q的先验几率O(Q)
Q成立的先验概率*p*(Q)
和
Q不成立的先验概率*p*(¬Q)
之比

O(Q)随*p*(Q)增大而增大
①*p*(Q)=0,O(Q)=0;
②*p*(Q)=1,O(Q)=∞;

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

- 对Bayes理论进行改进，消去先验概率p(P)；

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}=\frac{p(P/Q)\bullet \boxed{p(Q)}}{p(P/\neg Q)\bullet \boxed{p(\neg Q)}}$$

命题Q的后验几率O(Q/P)
前提P成立情况下，
Q成立的后验概率p(Q/P)
和
Q不成立的后验概率p(¬Q/P)
之比

$$\boxed{\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}}=\frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}\bullet \boxed{O(Q)}$$

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - 对Bayes理论进行改进，消去先验概率$p(P)$；

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \boxed{\frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}} \bullet O(Q)$$

命题Q的后验几率O(Q/P)
前提P成立情况下，
Q成立的后验概率$p(Q/P)$
和
Q不成立的后验概率$p(\neg Q/P)$
之比

$$LS = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}$$

$$O(Q/P) = \boxed{LS} \bullet O(Q) \quad ③$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

- 对Bayes理论进行改进，消去先验概率p(P)；

$$\boxed{O(Q/P)} = \boxed{LS} \bullet \boxed{O(Q)} \quad ③$$

$$O(Q) = \frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$

$$O(Q/P) = \frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}$$

- 命题Q的先验几率O(Q)；
- 命题Q的后验几率O(Q/P)；
- LS——推理规则P⇒Q成立的充分性因子；
  - 表示P成立对Q成立的影响力；

$$LS = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}$$

- 公式③称为
  - Bayes公式的几率似然形式

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法

命题Q的后验几率O(Q/¬P)
前提P不成立情况下，
Q成立的后验概率p(Q/¬P)
和
Q不成立的后验概率p(¬Q/¬P)
之比

$$\frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)} = \boxed{\frac{p(\neg P/Q)}{p(\neg P/\neg Q)}} \bullet O(Q)$$

$$LN = \frac{p(\neg P/Q)}{p(\neg P/\neg Q)}$$

$$O(Q/\neg P) = \boxed{LN} \bullet O(Q) \quad ④$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

$$O(Q)=\frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$

(2)主观Bayes方法

- 对Bayes理论进行改进，消去先验概率**p(P)**；

$$O(Q/P)=\boxed{LS}\bullet O(Q) \quad ③$$

$$O(Q/\neg P)=\boxed{LN}\bullet O(Q) \quad ④$$

$$O(Q/P)=\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}$$

$$O(Q/\neg P)=\frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)}$$

- **LS**——推理规则P⇒Q成立的充分性因子； ★
- **LN**——推理规则P⇒Q成立的必要性因子； ★

5.3 主观Bayes方法

$$O(Q/P) = \boxed{LS} \bullet O(Q) \quad ③$$

$$O(Q/\neg P) = \boxed{LN} \bullet O(Q) \quad ④$$

- LS——充分性因子
  - =1:O(Q/P)=O(Q)，P对Q无影响；
  - >1:O(Q/P)>O(Q)，P支持Q；
  - <1:O(Q/P)<O(Q)，P不支持Q；
- LN——必要性因子
  - =1:O(Q/¬P)=O(Q)， ¬P对Q无影响；
  - >1:O(Q/¬P)>O(Q)， ¬P支持Q；
  - <1:O(Q/¬P)<O(Q)， ¬ P不支持Q；

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理

$$O(Q)=\frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$

  - (2)主观Bayes方法
    - 对Bayes理论进行改进，消去先验概率p(P)；

$$O(Q/P)=\boxed{LS}\bullet O(Q) \quad ③$$

$$O(Q/\neg P)=\boxed{LN}\bullet O(Q) \quad ④$$

$$O(Q/P)=\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}$$

$$O(Q/\neg P)=\frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)}$$

- LS——推理规则P⇒Q成立的充分性因子；
  - 表示P成立对Q成立的影响力；
- LN——推理规则P⇒Q成立的必要性因子；
  - 表示P不成立对Q成立的影响力；

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

$$O(Q/P) = \boxed{LS} \bullet O(Q) \quad ③$$

$$O(Q/\neg P) = \boxed{LN} \bullet O(Q) \quad ④$$

- LS和LN促进了Bayes理论不确定推理中的应用；
- LS（和LN）表示了前提P对结论Q的影响程度：
  - 专家可以在缺乏大量统计数据的情况下，做出近似的估计；
  - 在不需要精确计算的应用中，近似估计十分有用；

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

$$O(Q/P) = \boxed{LS} \bullet O(Q) \qquad ③$$

$$O(Q/\neg P) = \boxed{LN} \bullet O(Q) \qquad ④$$

- 基于专家主观估计的**LS**（和**LN**）而演算出来的**后验概率*p*(Q/P)**称为**主观概率**；

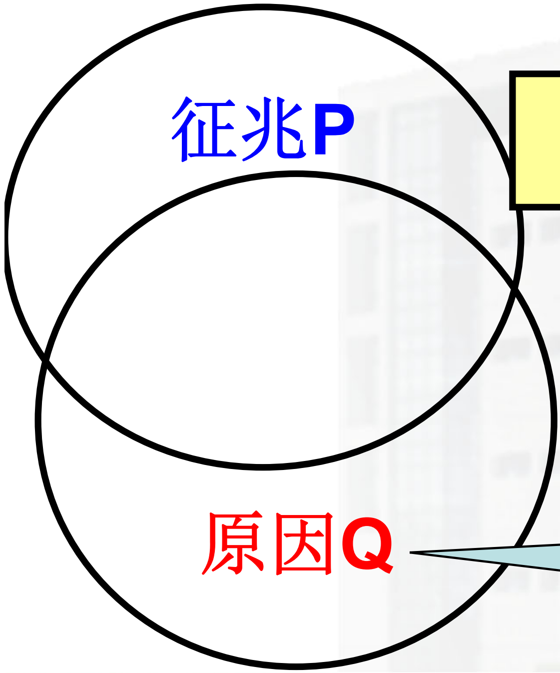
$$LS \bullet O(Q) \Rightarrow \boxed{O(Q/P)} = \frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \boxed{\frac{p(Q/P)}{1-p(Q/P)}}$$

$$LN \bullet O(Q) \Rightarrow \boxed{O(Q/\neg P)} = \frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)} = \boxed{\frac{p(Q/\neg P)}{1-p(Q/\neg P)}}$$

- 上述推算**主观概率**的方法称为**主观Bayes方法**；

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (2)主观Bayes方法
    - P——征兆，汽车轮子发出刺耳的噪声；
    - Q——原因，汽车刹车失调；



LS=120 $\xrightarrow{LS \bullet O(Q)}$ O(Q/P)=6.4

LN=0.3 $\xrightarrow{LN \bullet O(Q)}$ O(Q/¬P)=0.016

p(Q)=0.05

先验概率p(Q)

→ 先验几率

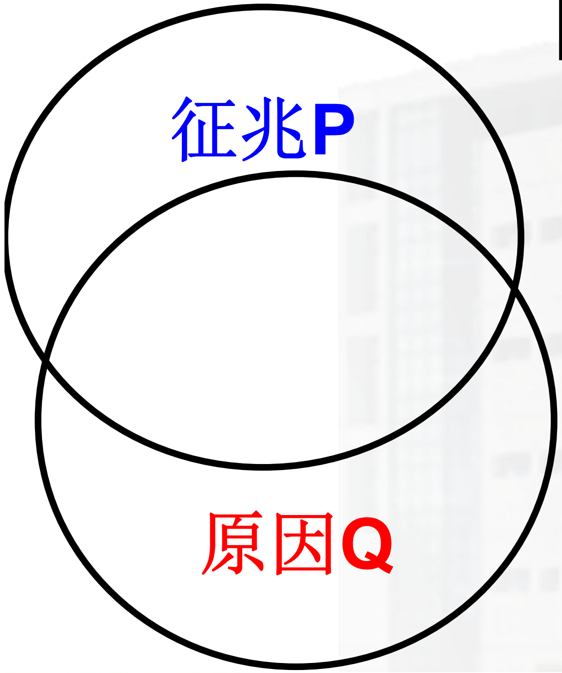
O(Q)=P(Q)/P(¬Q)=0.053

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

- P——征兆，汽车轮子发出刺耳的噪声；
- Q——原因，汽车刹车失调；



O(Q/P)=6.4

O(Q/¬P)=0.016

$$p(Q/P)=\frac{O(Q/P)}{1+O(Q/P)}$$

$$p(Q/\neg P)=\frac{O(Q/\neg P)}{1+O(Q/\neg P)}$$

p(Q/P)=0.87

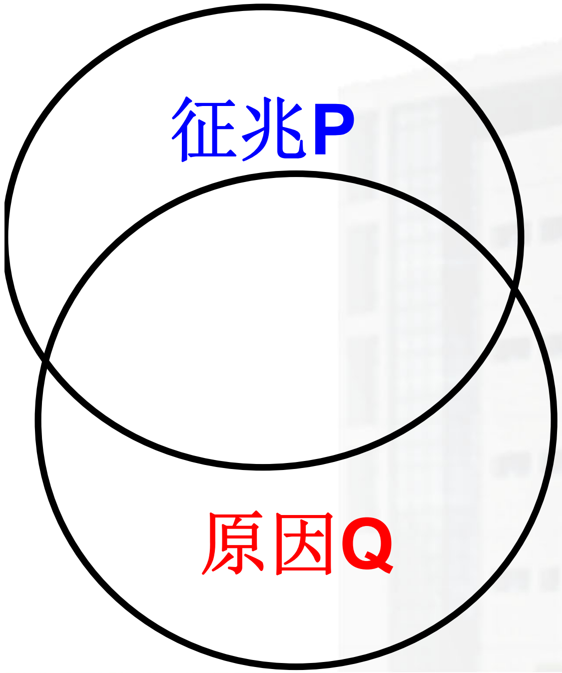
p(Q/¬P)=0.016

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(2)主观Bayes方法

- P——征兆，汽车轮子发出刺耳的噪声；
- Q——原因，汽车刹车失调；



LS=120

p(Q)=0.05

主观Bayes方法

p(Q/P)=0.87

p(P)=0.04

p(Q)=0.05

p(P/Q)=0.7

Bayes公式

p(Q/P)=0.88

5.3 主观Bayes方法

- 例
  - 对于规则P⇒Q，
  - 已知*p*(Q)=0.04，LS=100，LN=0.4，
  - 请应用主观Bayes方法求出*p*(Q/P)和p(Q/¬P)

$$O(Q)=\frac{p(Q)}{1-p(Q)}=\frac{0.04}{1-0.04}=0.042$$

$$O(Q/P)=LS\times O(Q)=100\times 0.042=4.2$$

$$p(Q/P)=\frac{O(Q/P)}{1+O(Q/P)}=\frac{4.2}{1+4.2}=0.81$$

5.3 主观Bayes方法

- 例
  - 对于规则P⇒Q，
  - 已知$p(Q)=0.04$，LS=100，LN=0.4，
  - 请应用主观Bayes方法求出$p(Q/P)$和$p(Q/\neg P)$

$$O(Q)=\frac{p(Q)}{1-p(Q)}=\frac{0.04}{1-0.04}=0.042$$

$$O(Q/\neg P)=LN\times O(Q)=0.4\times 0.042=0.017$$

$$p(Q/\neg P)=\frac{O(Q/\neg P)}{1+O(Q/\neg P)}=\frac{0.017}{1+0.017}=0.017$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）

- 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
  - 给出后验概率p(P/P‘)；
  - 推算出证据P‘相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P')=p(Q,P')/p(P')$$

加法定理（事件不相容）

$$p(Q/P')=\frac{p(Q,P',P)+p(Q,P',\neg P)}{p(P')}$$

乘法定理的扩展

$$\frac{p(Q/P',P)\,p(P/P')\,p(P')+p(Q/P',\neg P)\,p(\neg P/P')\,p(P')}{p(P')}$$

$$p(Q/P')=p(Q/P',P)\,p(P/P')+p(Q/P',\neg P)\,p(\neg P/P')$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

- (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
  - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
    - 给出后验概率p(P/P‘)；
    - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = \boxed{p(Q/P',P)} \bullet p(P/P') + \boxed{p(Q/P',\neg P)} \bullet p(\neg P/P') \quad ⑤$$

- P‘是通过P去影响Q，且P已是成立或不成立
- 忽略P‘；

$$p(Q/P') = \underbrace{\boxed{p(Q/P)}}_{③} \bullet p(P/P') + \underbrace{\boxed{p(Q/\neg P)}}_{④} \bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

- (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
  - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
    - 给出后验概率p(P/P‘)；
    - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$\boxed{p(Q/P)}\bullet p(P/P')+\boxed{p(Q/\neg P)}\bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

$$③\ LS\bullet O(Q) \Longrightarrow \boxed{O(Q/P)}=\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}=\boxed{\frac{p(Q/P)}{1-p(Q/P)}}$$

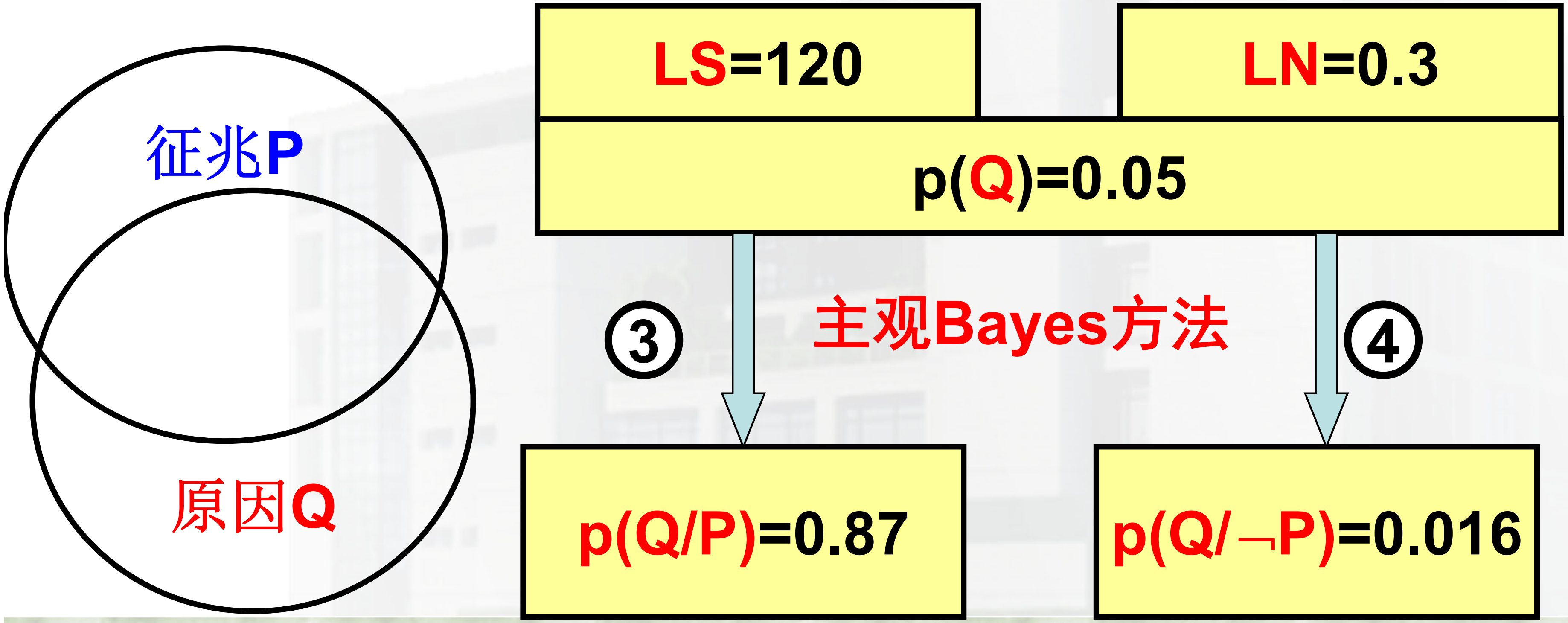
$$④\ LN\bullet O(Q) \Longrightarrow \boxed{O(Q/\neg P)}=\frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)}=\boxed{\frac{p(Q/\neg P)}{1-p(Q/\neg P)}}$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

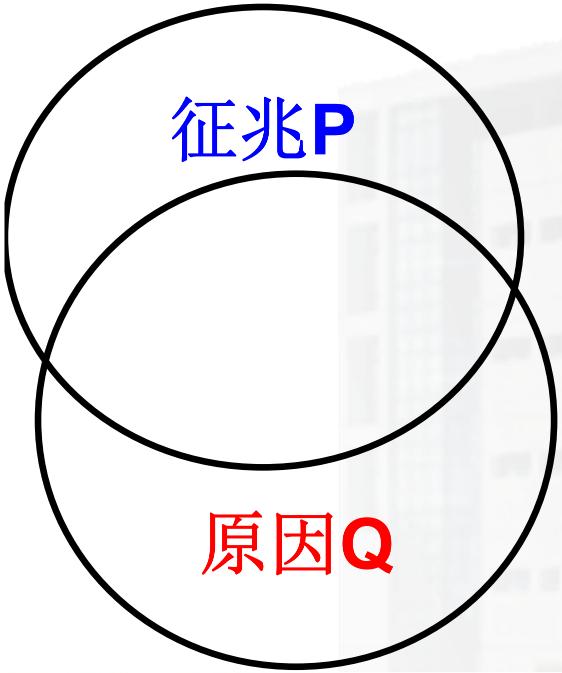
(3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）

- 例2、汽车刹车失调问题
  - P——征兆，汽车轮子发出刺耳的噪声；
  - Q——原因，汽车刹车失调；



5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
    - 例2、汽车刹车失调问题
      - P——征兆，汽车轮子发出刺耳的噪声；
      - Q——原因，汽车刹车失调；



p(Q/P)=0.87

p(Q/¬P)=0.016

$$p(Q/P') = p(Q/P)\bullet p(P/P') + p(Q/\neg P)\bullet p(\neg P/P')$$

$$p(Q/P') = 0.87\bullet 0.8 + 0.016\bullet 0.2 = 0.70$$

⑥

p(P/P’)=0.8

p(¬P/P’)=0.2

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
    - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
      - 给出后验概率p(P/P‘)；
      - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = p(Q/P) \bullet p(P/P') + p(Q/\neg P) \bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

    - 传递可以有更长的路径
      - 如，P‘⇒ P ⇒Q ⇒W

$$p(W/P') = p(W/Q) \bullet \boxed{p(Q/P')} + p(W/\neg Q) \bullet \boxed{p(\neg Q/P')}$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

(3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）

- 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
  - 给出后验概率p(P/P‘)；
  - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = p(Q/P)\bullet \boxed{p(P/P')} + p(Q/\neg P)\bullet \boxed{p(\neg P/P')} \quad ⑥$$

$$p(P/P') = p(P)$$

$$p(Q/P') = \boxed{p(Q/P)\bullet p(P)} + \boxed{p(Q/\neg P)\bullet p(\neg P)}$$

$$\boxed{= p(Q)}$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

- (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
  - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
    - 给出后验概率p(P/P‘)；
    - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = p(Q/P)\bullet p(P/P') + p(Q/\neg P)\bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

$$p(P/P') = p(P)$$

$$\boxed{p(Q/P') = p(Q)}$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

- (3)不确定性的推理（P’ ⇒P ⇒Q）
  - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
    - 给出后验概率p(P/P‘)；
    - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = \boxed{p(Q/P)} \bullet p(P/P') + \boxed{p(Q/\neg P)} \bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

LS

LN

p(Q)

主观Bayes方法

p(Q/P)

p(Q/¬P)

$$p(P/P') = p(P)$$

$$p(Q/P')$$

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (3)不确定性的推理
    - 前提（即导致结论的证据）的不确定性可以设想为与另一事件P'有关：
      - 给出后验概率p(P/P‘)；
      - 推算出相对于结论Q的后验概率p(Q/P‘)；

$$p(Q/P') = p(Q/P) \bullet p(P/P') + p(Q/\neg P) \bullet p(\neg P/P') \quad ⑥$$

主观Bayes方法

$$p(P/P') = p(P)$$

$$\boxed{p(Q/P') = p(Q)}$$

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (3)不确定性的推理
    - 为了避免这种不一致性，主观Bayes方法采用分段线性插值的手段：

$$p(P/P')=0 \longrightarrow p(Q/P')=p(Q/\neg P)$$

$$p(P/P')=p(P) \longrightarrow p(Q/P')=p(Q)$$

$$p(P/P')=1 \longrightarrow p(Q/P')=p(Q/P)$$

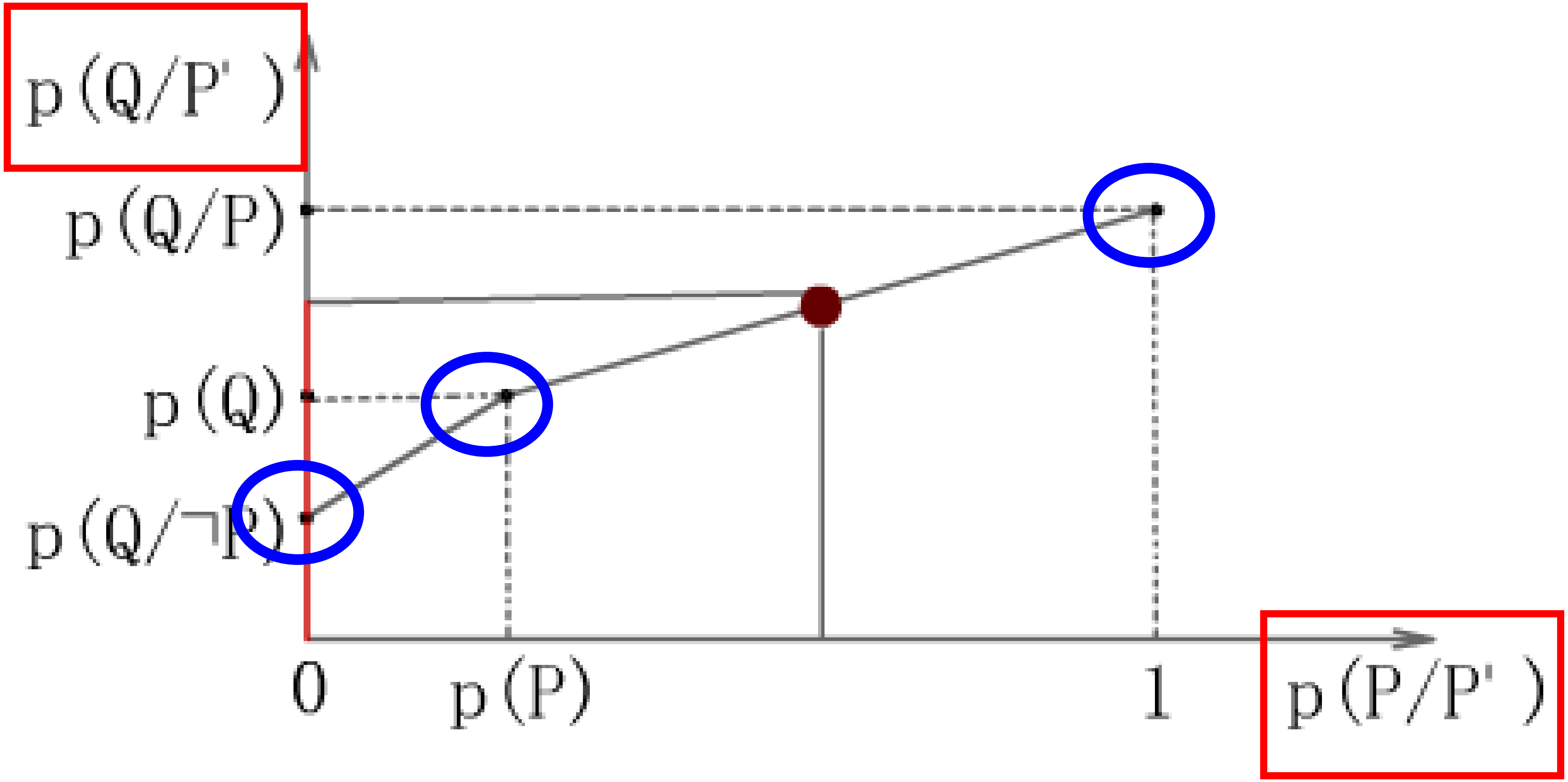
$$p(Q/P')=p(Q/P)\bullet p(P/P')+p(Q/\neg P)\bullet p(\neg P/P')$$

5.3 主观Bayes方法

$$p(P/P')=0 \Rightarrow p(Q/P')=p(Q/\neg P)$$

$$p(P/P')=p(P) \Rightarrow p(Q/P')=p(Q)$$

$$p(P/P')=1 \Rightarrow p(Q/P')=p(Q/P)$$



5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (3)不确定性的推理
    - 为了避免这种不一致性，主观Bayes方法采用分段线性插值的手段：★

$$
p(Q/P')=\begin{cases}\boxed{\begin{gathered}p(Q/\neg P)+\dfrac{p(Q)-p(Q/\neg P)}{p(P)}\bullet p(P/P')\\ 0\le p(P/P')<p(P)\end{gathered}}\\ \boxed{\begin{gathered}p(Q)+\dfrac{p(Q/P)-p(Q)}{1-p(P)}\bullet(p(P/P')-p(P))\\ p(P)\le p(P/P')\le 1\end{gathered}}\end{cases}
$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

$$p(Q/P')=\begin{cases} \boxed{p(Q/\neg P)+\dfrac{p(Q)-p(Q/\neg P)}{p(P)}\bullet p(P/P') \quad 0\le p(P/P')<p(P)} \\ \boxed{p(Q)+\dfrac{p(Q/P)-p(Q)}{1-p(P)}\bullet(p(P/P')-p(P)) \quad p(P)\le p(P/P')\le 1} \end{cases}$$

- (3)不确定性的推理
- 已知：R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- 其中，P(E1|S1)=0.5，P(H)=0.01，P(E1)=0.1
- 求：P(H|S1)
- 因为，P(E1|S1)=0.5 > P(E1)=0.1 则

$$\mathrm{p}(H\mid S1)=P(H)+\frac{\boxed{P(H\mid E1)}-P(H)}{1-P(E1)}\times\left[P(E1\mid S1)-P(E1)\right]$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- 其中，P(E1|S1)=0.5，P(H)=0.01，P(E1)=0.1
- 求：P(H|S1)

$$O(H)=\frac{p(H)}{1-p(H)}=\frac{0.01}{1-0.01}=0.01$$

$$O(H/E1)=LS\times O(H)=65\times 0.01=0.65$$

$$p(H/E1)=\frac{O(H/E1)}{1+O(H/E1)}=\frac{0.65}{1+0.65}=0.3963$$

5.3 主观Bayes方法

1、应用Bayes理论于不确定推理

- (3)不确定性的推理
- 已知：R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- 其中，P(E1|S1)=0.5，P(H)=0.01，P(E1)=0.1
- 求：P(H|S1)
- 因为，P(E1|S1)=0.5 > P(E1)=0.1 则

$$p(H \mid S1) = P(H) + \frac{\boxed{P(H \mid E1)} - P(H)}{1 - P(E1)} \times [P(E1 \mid S1) - P(E1)]$$

$$= 0.01 + \frac{0.3643 - 0.01}{1 - 0.1} \times (0.5 - 0.1) = 0.1817$$

5.3 主观Bayes方法

- 1、应用Bayes理论于不确定推理
  - (4)不确定性的组合
    - 常常会出现多个相互独立的前提P_i支持同一结论Q的情况，表示为：

$$\begin{cases} P_1' \Rightarrow P_1 \Rightarrow Q \\ P_2' \Rightarrow P_2 \Rightarrow Q \end{cases}$$

$$P_1'P_2' \Rightarrow Q$$

5.3 主观Bayes方法

(4)不确定性的组合★

多个相互独立的前提**Pi**

$$O(Q \mid P_1'P_2') = \frac{P(Q \mid P_1'P_2')}{P(\neg Q \mid P_1'P_2')} = \frac{P(P_1'P_2' \mid Q) \times P(Q)}{P(P_1'P_2' \mid \neg Q) \times P(\neg Q)}$$

$$= \frac{P(P_1' \mid Q)}{P(P_1' \mid \neg Q)} \times \frac{P(P_2' \mid Q)}{P(P_2' \mid \neg Q)} \times O(Q)$$

$$= \frac{O(Q \mid P_1')}{O(Q)} \times \frac{O(Q \mid P_2')}{O(Q)} \times O(Q)$$

5.3 主观Bayes方法

例 设有规则

R1: If E1 Then (20, 1) H

R2: If E2 Then (300, 1) H

已知证据E1和E2必然发生，并且P(H)=0.03，求H的后验概率 P(H | E1E2)。

解:因为P(H)=0.03，则

$O(H)=0.03/(1-0.03)=0.030927$

根据R1有:

$O(H|E1)=LS1\times O(H)=20\times 0.030927=0.6185$

根据R2有:

$O(H|E2)=LS2\times O(H)=300\times 0.030927=9.2781$

5.3 主观Bayes方法

- 那么

$$O(H \mid E_1E_2) = \frac{O(H \mid E_1)}{O(H)} \times \frac{O(H \mid E_2)}{O(H)} \times O(H)$$

=0. 6185×9. 2781/0. 030927=185. 55

所以H的后验概率为

$$\text{P(H | E1E2)} = \frac{O(H \mid E_1E_2)}{1+O(H \mid E_1E_2)}$$

=185. 55/(1＋185. 55)=0. 99464

5.3 主观Bayes方法

- 例
  - 已知:
  - R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
  - R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
  - 其中,
  - $P(H)=0.01$
  - $P(E1|S1)=0.5$， $P(E2|S2)=0.02$,
  - $P(E1)=0.1$， $P(E2)=0.03$
  - 求： $P(H|S1S2)$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1，P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$P(H \mid S1S2) = \frac{\boxed{O(H \mid S1S2)}}{1 + O(H \mid S1S2)}$$

$$O(H \mid S1S2) = \frac{\boxed{O(H \mid S1)}}{O(H)} \times \frac{O(H \mid S2)}{O(H)} \times O(H)$$

$$O(H \mid S1) = \frac{\boxed{p(H \mid S1)}}{1 - p(H \mid S1)}$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

因为，P(E1|S1)=0.5 > P(E1)=0.1 则

$$p(H \mid S1) = P(H) + \frac{\boxed{P(H \mid E1)} - P(H)}{1 - P(E1)} \times \left[P(E1 \mid S1) - P(E1) \right]$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1，P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$O(H)=\frac{p(H)}{1-p(H)}=\frac{0.01}{1-0.01}=0.01$$

$$O(H/E1)=LS\times \boxed{O(H)}=65\times 0.01=0.65$$

$$p(H/E1)=\frac{\boxed{O(H/E1)}}{1+O(H/E1)}=\frac{0.65}{1+0.65}=0.3963$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

因为，P(E1|S1)=0.5 > P(E1)=0.1 则

$$p(H\mid S1)=P(H)+\frac{\boxed{P(H\mid E1)}-P(H)}{1-P(E1)}\times\left[P(E1\mid S1)-P(E1)\right]$$

$$=0.01+\frac{\boxed{0.3643}-0.01}{1-0.1}\times(0.5-0.1)=0.1817$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$\mathrm{O}(H \mid S1S2) = \frac{\boxed{O(H \mid S1)}}{O(H)} \times \frac{O(H \mid S2)}{O(H)} \times O(H)$$

$$O(H \mid S1) = \frac{\boxed{p(H \mid S1)}}{1 - p(H \mid S1)} = \frac{0.1817}{1 - 0.1817} = 0.222$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1，P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$P(H \mid S1S2) = \frac{\boxed{O(H \mid S1S2)}}{1 + O(H \mid S1S2)}$$

$$O(H \mid S1S2) = \frac{\boxed{O(H \mid S1)}}{O(H)} \times \frac{\boxed{O(H \mid S2)}}{O(H)} \times O(H)$$

$$O(H \mid S1) = \frac{\boxed{p(H \mid S1)}}{1 - p(H \mid S1)} \qquad O(H \mid S2) = \frac{\boxed{p(H \mid S2)}}{1 - p(H \mid S2)}$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

因为，P(E2|S2)=0.02 < P(E2)=0.03 则

$$p(H \mid S2) = \boxed{P(H \mid \neg E2)} + \frac{P(H) - \boxed{P(H \mid \neg E2)}}{P(E2)} \times P(E2 \mid S2)$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$O(H)=\frac{p(H)}{1-p(H)}=\frac{0.01}{1-0.01}=0.01$$

$$O(H/\neg E2)=LN\times\boxed{O(H)}=0.0001\times 0.01=0.000001$$

$$p(H/\neg E2)=\frac{\boxed{O(H/\neg E2)}}{1+O(H/\neg E2)}=0.000001$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

因为，P(E2|S2)=0.02 < P(E2)=0.03 则

$$p(H \mid S2) = \boxed{P(H \mid \neg E2)} + \frac{P(H) - \boxed{P(H \mid \neg E2)}}{P(E2)} \times P(E2 \mid S2)$$

$$= \boxed{0.000001} + \frac{0.01 - \boxed{0.000001}}{0.03} \times 0.02 = 0.006667$$

5.3 主观Bayes方法

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$P(H\mid S1S2)=\frac{\boxed{O(H\mid S1S2)}}{1+O(H\mid S1S2)}$$

$$O(H\mid S1S2)=\frac{O(H\mid S1)}{O(H)}\times\frac{\boxed{O(H\mid S2)}}{O(H)}\times O(H)$$

$$O(H\mid S2)=\frac{\boxed{p(H\mid S2)}}{1-p(H\mid S2)}=\frac{0.006667}{1-0.006667}=0.006712$$

5.3 主观Bayes方法

传递+组合

- 已知：
- R1:IF E1 THEN (65,0.01) H
- R2:IF E2 THEN (300,0.0001) H
- 其中，
- P(H)=0.01
- P(E1|S1)=0.5， P(E2|S2)=0.02，
- P(E1)=0.1， P(E2)=0.03
- 求：P(H|S1S2)

$$P(H\mid S1S2)=\frac{\boxed{O(H\mid S1S2)}}{1+O(H\mid S1S2)}$$

$$\mathrm{O}(H\mid S1S2)=\frac{\boxed{O(H\mid S1)}}{O(H)}\times\frac{\boxed{O(H\mid S2)}}{O(H)}\times O(H)$$

$$=\frac{0.222}{0.01}\times\frac{0.06712}{0.01}\times 0.01=0.1457$$

5.3 主观Bayes方法

- 2、在推理网络中传递不确定性

给出相应于各规则的LS_i和LN_i

地位

p(A)，p(B)和$p(Q_f)$

Q_f为真的后验概率

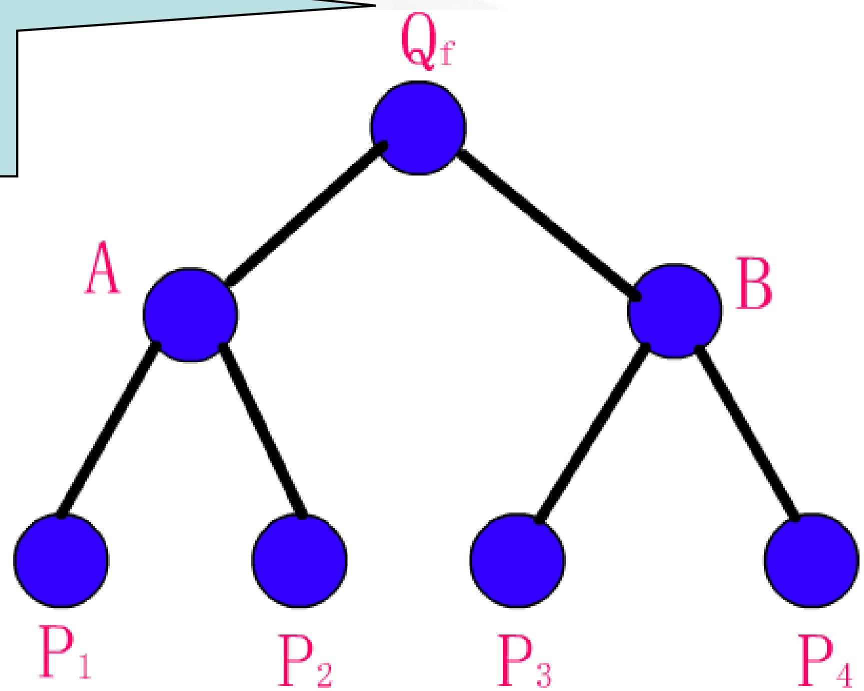
$P(Q_f|P_1P_2P_3P_4)$

- 其他规则的前提；

$$P_1 \Rightarrow A \qquad P_3 \Rightarrow B$$

$$P_2 \Rightarrow A \qquad P_4 \Rightarrow B$$

$$A \Rightarrow Q_f \qquad B \Rightarrow Q_f$$



- 主观Bayes方法有优点：

  1）该方法基于概率理论，具有坚实的理论基础，是目前不确定推理中最成熟的方法之一；

  2）计算量适中。

- 主观Bayes方法不足：

  1）要求有大量的概率数据来构造知识库，并且难于对这些数据进行解释；

  2）在原始证据具有相互独立性，并能提供精确且一致的主观概率数据的情况下，该方法可以令人满意地处理不确定推理。但在实际当中，这些概率值很难保证一致性。

5.4 可信度方法

- 可信度方法是由美国斯坦福大学肖特利夫(E.H.Shortliffe)等人在考察了非概率的和非形式化的推理过程后于已于1975年提出的一种不确定性推理模型，并于1976年首次在血液病诊断专家系统MYCIN中得到了成功应用。
- 它是不确定性推理中非常简单且又十分有效的一种推理方法。
- 目前，有许多成功的专家系统都是基于这一方法建立起来的。

5.4 可信度方法

建造医学专家系统时的问题

1. Bayes方法的问题

- 医疗诊断问题和地质问题一样都具有不确定性，主要的不同是由于自然界中总共才有92种天然元素，所以关于矿物的地质假设数目就是有限的。但是由于微生物的数量巨大，因此可能的疾病假设也更多。
- 虽然Bayes定理在医学上很有用，但是它的准确性和事先知道有多少种可能性有关。

5.4 可信度方法

Bayes方法的问题

- 如给定一些症状，使用Bayes定理来确定某种疾病的概率：

$$P(D_i \mid E) = \frac{P(E \mid D_i)P(D_i)}{P(E)} = \frac{P(E \mid D_i)P(D_i)}{\sum_j P(E \mid D_j)P(D_j)}$$

其中

- Ｄｉ是第ｉ种疾病；
- E是证据；
- Ｐ（Ｄｉ）是在已知任何证据之前病人得这种病的先验概率；
- Ｐ（Ｅ｜Ｄｉ）是在已知患有Ｄｉ疾病的情况下，病人出现症状E的条件概率；ｊ是对所有疾病求和。

5.4 可信度方法

Bayes方法的问题

- 要给出所有这些概率一致的、完整的值往往是不可能的。
- 实际上这些概率或统计是在数据或信息不断积累的基础上得到，并且随着证据一点一点的积累，又会增加新的概率需要计算或统计，以确定证据积累时病人患某种疾病的可能性。

5.4 可信度方法

2. 可信与不信任问题

- 信任与不信任问题是设计医学诊断专家系统时所面临的又一个问题。可信度是对信任的一种度量，是指人们根据以往经验对某个事物或现象为真的程度的一个判断，或者说是人们对某个事物或现象为真的相信程度。根据概率论，我们知道：

$$P(H)+P(\neg H)=1$$

于是有$P(H)=1-P(\neg H)$

对于基于证据E的后验假设有

$$P(H \mid E)=1-P(\neg H \mid E)$$

把上式用于医学专家系统中，如：对于MYCIN中的规则：

5.4 可信度方法

MYCIN中的规则

- 规则:
- If①生物体的染色呈革兰氏阳性，并且
  ②生物体的形态为球形，并且
  ③生物体生长构造是链状

Then 有证据表明(0.7)这种生物是链球菌。

即是说如果3个前提条件都满足的话，有70%的可能确定它是一种链球菌:

$$P(H \mid E1E2E3) = 0.7$$

医学专家认为上式是可以接受的，但是医生认为下式是不正确的:

$$P(\neg H \mid E1E2E3)=1-0.7=0.3$$

这说明0.7和0.3反映的不是信任的概率，而只是一种似然性。这就是说信任和不信任是不一致的。

5.4 可信度方法

原因分析：

- 尽管P(H｜E)表明E和H存在一种因果关系，但┐H和E之间可能没有因果关系。
- 但是P(H｜E)＝ 1 -P(┐H｜E)却暗示如果E和H之间有因果关系，则E和┐H之间也有因果关系。
- 正是由于概率论上的这些问题使得MYCIN专家系统的开发者需要建立新的模型来处理不确定性问题。
- 这种模型和基于重复事件出现频率有关的普通概率不同，它基于利用某些证据去证实假设的方法，称为基于认知概率或确认度的确定性理论。

5.4 可信度方法

可信度模型

- 可信度模型是Shortliffe等人在开发细菌感染疾病诊断专家系统MYCIN中提出的一种不确定性推理模型，它是基于确定性理论，结合概率论和模糊集合论等方法提出的一种推理方法。
- 该方法采用可信度CF(Certainty Factor)作为不确定性的测度，通过对CF(H,E)的计算，探讨证据E对假设H的定量支持程度，因此，该方法也称为C-F模型。
- 先讨论在C-F模型中，关于信任与不信任的处理方法。

5.4 可信度方法

MB(H,E)和MD(H,E)不能同时大于0
同一证据E，不能
既增加结论H的可信度，
又增加结论H的不可信度。

- 1、
  - (
    - MYCIN提出的可信度方法中，推理规则表示为：
    - IF E THEN H，CF(H,E)，其中：
      - 证据E——命题的合取∧和析取∨组合；
      - 结论H——单一命题；
      - CF(H,E)——确定性因子，简称为可信度，证据E为真的情况下，结论H为真的可能程度；
    - CF(H,E)=MB(H,E)-MD(H,E)
      - (1)MB(H,E)=a——信任度量
        - 证据E成立使结论H的可信度增加了数量a；
      - (2)MD(H,E)=b ——不信任度量
        - 证据E成立使结论H的不可信度增加了数量b；

5.4 可信度方法

总结：可信度的定义

- 在C-F模型中，可信度最初定义为信任与不信任的差，即CF(H,E)定义为：★

$$CF(H,E)=MB(H,E)-MD(H,E)$$

由证据E得到假设H的可信度（也称为确定性因子）

MB(Measure Belief,MB)称为信任增长度，它表示因为与前提条件E匹配的证据的出现，使结论H为真的信任的增长程度。

MD(Measure Disbelief,MD)称为不信任增长度，它表示因为与前提条件E匹配的证据的出现，对结论H的不信任的增长程度。

5.4 可信度方法

MB(H, E) 定义

$$MB(H,E)=\begin{cases}1, & P(H)=1\\ \dfrac{\max\{P(H\mid E),P(H)\}-P(H)}{1-P(H)}, & \text{否则}\end{cases}$$

MD(H, E) 定义

$$MD(H,E)=\begin{cases}1, & P(H)=0\\ \dfrac{\min\{P(H\mid E),P(H)\}-P(H)}{-P(H)}, & \text{否则}\end{cases}$$

5.4 可信度方法

若CF(H,E)>0，P(H|E)>P(H)。说明由于前提条件E所对应证据的出现增加了H为真的概率，即增 [illegible] 度，CF(H，E)的值 [illegible] 的可信度就越

若**CF(H,E)<0**，则**P(H|E)<P(H)**。这说明由于前提条件**E**所对应证据的出现减少了**H**为真的概率，即增加了**H**为假的可信度，**CF(H，E)**的值越小，增加**H**为假的可信度就越大。

$$CF(H,E)=\begin{cases} \cdots, & P(H\mid E)>P(H) \\ 0, & P(H\mid E)=P(H) \\ 0-MD=-\dfrac{P(H)-P(H\mid E)}{P(H)}, & P(H\mid E)<P(H) \end{cases}$$

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质：★

（1）互斥性

对同一证据，它不可能既增加对H的信任程度，又同时增加对H的不信任程度，这说明MB与MD是互斥的。即有如下互斥性：

当MB(H,E)>0时，MD(H,E)=0

当MD(H,E)>0时，MB(H,E)=0

（2）值域

0≤MB(H,E)≤1

0≤MD(H,E)≤1

-1≤CF(H,E)≤1

$$CF(H,E)=\begin{cases} MB-0=\dfrac{P(H|E)-P(H)}{1-P(H)}, & P(H|E)>P(H) \\ 0, & P(H|E)=P(H) \\ 0-MD=-\dfrac{P(H)-P(H|E)}{P(H)}, & P(H|E)<P(H) \end{cases}$$

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质：

（3）典型值

① 当CF(H,E)=1时，有P(H|E)=1，它说明由于E所对应证据的出现使H为真。此时

$$MB(H,E)=1，MD(H,E)=0$$

② 当CF(H,E)=-1时，有P(H|E)=0，说明由于E所对应证据的出现使H为假。此时

$$MB(H,E)=0，MD(H,E)=1$$

③ 当CF(H,E)=0时，则P(H|E)=P(H)，表示H与E独立即E所对应的证据的出现对H没有影响。

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质：

（4）对H的信任增长度等于对非H的不信任增长度

根据MB、MD的定义及概率的性质

$$MD(\neg H,E)=\frac{P(\neg H|E)-P(\neg H)}{\neg P(\neg H)}=\frac{(1-P(H|E))-(1-P(H))}{-(1-P(H))}$$

$$=\frac{-P(H|E)+P(H)}{-(1-P(H))}=MB(H,E)$$

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质：

（4）对H的信任增长度等于对非H的信任增长度

再根据CF的定义及MB、MD的互斥性有

$$CF(H,E)+CF(\neg H,E)$$
$$=(MB(H,E)-MD(H,E))+(MB(\neg H,E)-MD(\neg H,E))$$
$$=(MB(H,E)-0)+(0-MD(\neg H,E))$$
$$=MB(H,E)-MD(\neg H,E)=0$$

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质： ★

为此得到以下3个结论：

① 对H的信任增长度等于对非H的不信任增长度。

② 对H的可信度与对非H的可信度之和等于0。

③ 可信度不是概率。对概率有

$$P(H)+P(\neg H)=1 \text{ 且}$$

$$0 \leqslant P(H), P(\neg H) \leqslant 1$$

而可信度不满足此条件。

5.4 可信度方法

根据CF、MB、MD的定义，可得性质：

（5）**对同一前提E，**若支持若干个不同的结论H_i (i=1，2，…，n)，则

$$\sum_{i=1}^{n} CF(H_i, E) \leq 1$$

因此，如果发现专家给出的知识有如下情况：

$CF(H_1,E)=0.7$， $CF(H_2,E)=0.4$

则因0.7+0.4=1.1＞1为非法，应进行调整或规范化。

5.4 可信度方法

注意事项

实际应用中P(H)和P(H|E)的值是很难获得的，因此CF(H，E)的值应由领域专家给出。

- 原则：若相应证据的出现会增加H为真的可信度，则CF(H，E)>0，证据的出现对H为真的支持程度越高，则CF(H，E)的值越大；
- 反之，证据的出现减少H为真的可信度，则CF(H，E)<0，证据的出现对H为假的支持程度越高，就使CF(H，E)的值越小；若相应证据的出现与H无关，则使CF(H，E)=0。

2. 可信度的计算

- (1) 规则不确定性的表示

  在C-F模型中，规则用产生式规则表示：

  If E Then H (CF(H，E))

- E是规则的前提条件；
- H是规则的结论；
- 注意：

  CF(H，E)是规则的可信度，也称为规则强度或知识强度，它描述的是知识的静态强度。这里前提和结论都可以是由复合命题组成。

2. 可信度的计算

(2) 证据不确定性的表示★

- 在CF模型中，证据E的不确定性也是用可信度因子CF(E)来表示的，其取值范围同样是 [-1，1]，其典型值为:

当证据E肯定为真时：CF(E)=1；

当证据E肯定为假时：CF(E)=-1；

当证据E一无所知时：CF(E)=0。

2. 可信度的计算

注意事项：

（1）证据可信度的来源有以下两种情况：如果是初始证据，其可信度是由提供证据的用户给出的；如果是先前推出的中间结论又作为当前推理的证据，则其可信度是原来在推出该结论时由不确定性的更新算法计算得到的。

（2）CF(E)所描述的是证据的动态强度。尽管它和知识的静态强度在表示方法上类似，但二者的含义却完全不同。知识的静态强度CF(H，E)表示的是规则的强度，即当E所对应的证据为真时对H的影响程度，而动态强度CF(E)表示的是证据E当前的不确定性程度。

5.4 可信度方法

2. 可信度的计算

(3) 组合证据不确定性的计算★

对证据的组合形式可分为“合取”与“析取”两种基本情况。当组合证据是多个单一证据的合取时，即

$$E=E1 \quad AND \quad E2 \quad AND \ \dots \ AND \quad En$$

时，若已知CF(E1)，CF(E2)，…，CF(En)，则

$$CF(E)=\min\{CF(E1), CF(E2), \dots, CF(En)\}$$

当组合证据是多个单一证据的析取时，即

$$E=E1 \quad OR \quad E2 \ OR \ \dots \ OR \ En$$

时，若已知CF(E1)，CF(E2)，…，CF(En)，则

$$CF(E)=\max\{CF(E1), CF(E2), \dots, CF(En)\}$$

另外，规定CF(┐E)=┐CF(E)。

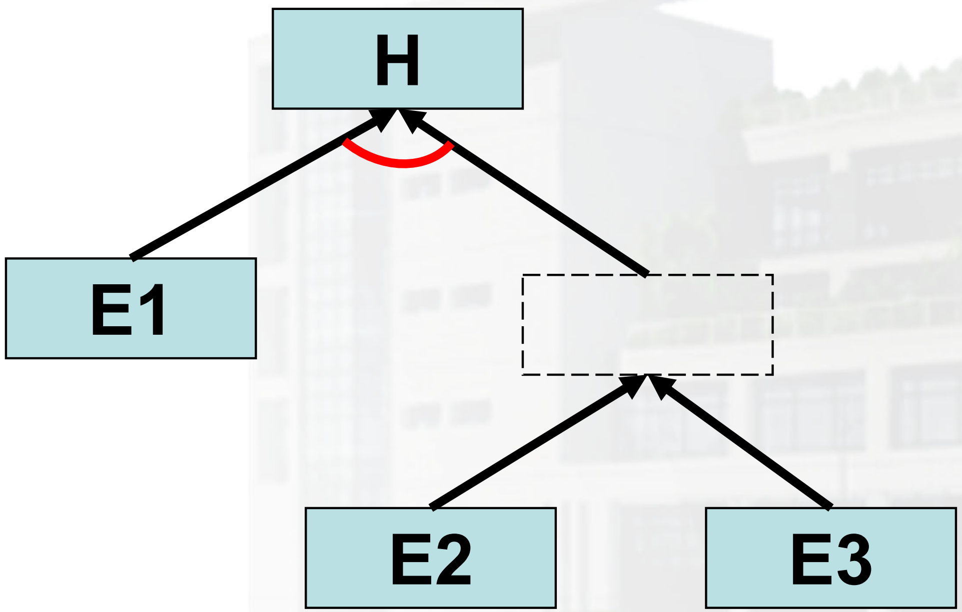
5.4 可信度方法

$$E1 \wedge (E2 \vee E3) \Rightarrow H$$

$$CF(H)=CF(H, E1 \wedge (E2 \vee E3)) \times \max\{0, CF(E1 \wedge (E2 \vee E3))\}$$

$$CF(E1 \wedge (E2 \vee E3)) = \min\{CF(E1), CF(E2 \vee E3)\}$$

$$= \min\{CF(E1), \max\{CF(E2), CF(E3)\}\}$$



2. 可信度的计算

(4) 不确定性的推理算法★

- C-F模型中的不确定性推理实际上是从不确定性的初始证据出发，不断运用相关的不确定性知识(规则)，逐步推出最终结论和该结论的可信度的过程。**而每一次运用不确定性知识，都需要由证据的不确定性和规则的不确定性去计算结论的不确定性。**

①证据肯定存在(CF(E)＝1)时

此时有：

$$CF(H)=CF(H,E)$$

这说明，规则强度CF(H,E)实际上就是在前提条件对应的证据为真时结论H的可信度。

5.4 可信度方法

2. 可信度的计算

(4) 不确定性的推理算法★

②证据不是肯定存在(CF(E)≠1)时

其计算公式如下：

$$CF(H)=CF(H,E)\times \max\{0,CF(E)\}$$

由上式可以看出，若CF(E)<0，即相应证据以某种程度为假，则 CF(H)=0

这说明在该模型中没有考虑证据为假时对结论H所产生的影响。

2. 可信度的计算

(4) 不确定性的推理算法★

③证据是多个条件组合的情况

即如果有两条规则推出一个相同结论，并且这两条规则的前提相互独立，结论的可信度又不相同，则可用不确定性的合成算法求出该结论的综合可信度。

参见下面的例子：

2. 可信度的计算

- 设有如下规则:

If E1 Then H (CF(H，E1))

If E2 Then H (CF(H，E2))

- 则结论H的综合可信度可分以下两步计算：★

第一步:分别对每条规则求出其CF(H)。即

CF1(H)=CF(H，E1)×max(0，CF(E1))

CF2(H)=CF(H，E2)×max(0，CF(E2))

2. 可信度的计算

第二步:用如下公式求E1与E2对H的综合可信度:

$$CF(H)=\begin{cases} CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)\times CF_2(H) & 若CF_1(H)\geq 0且CF_2(H)\geq 0 \\ CF_1(H)+CF_2(H)+CF_1(H)\times CF_2(H) & 若CF_1(H)<0且CF_2(H)<0 \\ CF_1(H)+CF_2(H) & 若CF_1(H)与CF_2(H)异号 \end{cases}$$

- 在后来基于MYCIN基础上形成的EMYCIN中，对上式做了如下的修改:
- 如果CF1(H)和CF2(H)异号，则:

5.4 可信度方法

2. 可信度的计算

$$CF(H)=\frac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min\{|CF_1(H)|,|CF_2(H)|\}}$$

其他情况不变。

如果可由多条知识推出同一个结论，并且这些规则的前提相互独立，结论的可信度又不相同，则可以将上述合成过程推广应用到多条规则支持同一条结论，且规则前提可以包含多个证据的情况。这时合成过程是先把第一条与第二条合成，然后再用该合成后的结论与第三条合成，依次进行下去，直到全部合成完为止。

5.4 可信度方法

- 总结不确定性的组合★

E1 $\Rightarrow$ H且E2 $\Rightarrow$ H

【1】$CF_1(H) \geq 0$, $CF_2(H) \geq 0$

$$CF(H) = CF1(H) + CF2(H) - CF1(H) \times CF2(H)$$

【2】$CF_1(H) < 0$, $CF_2(H) < 0$

$$CF(H) = CF1(H) + CF2(H) + CF1(H) \times CF2(H)$$

【3】$CF_1(H)$与$CF_2(H)$ 异号

$$CF(H) = \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min[|CF_1(H)|, |CF_2(H)|]}$$

5.4 可信度方法

例子分析：★

- 例　设有如下一组规则：

R1: IF E1 THNN H (0.9)

R2: IF E2 THEN H (0.6)

R3: IF E3 THEN H (-0.5)

R4: IF E4 AND (E5 OR E6) THEN E1 (0.8)

已知:CF(E2)=0.8，CF(E3)＝0.6，CF(E4)＝0.5，

CF(E5)=0.6，CF(E6)=0.8

求H的综合可信度CF(H)。

5.4 可信度方法

- 解:由R4得到:

$$
\begin{aligned}
CF(E1) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E4\ \ AND\ (E5\ OR\ E6))\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E4), CF(E5\ \ OR\ E6)\}\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, \min\{CF(E4), \max\{CF(E5), CF(E6)\}\}\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, \min\{0.5, 0.8\}\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, 0.5\} \\
&= 0.4
\end{aligned}
$$

- 由R1得到:

$$
\begin{aligned}
CF1(H) &= CF(H,E1) \times \max\{0, CF(E1)\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, 0.4\} = 0.36
\end{aligned}
$$

5.4 可信度方法

- 由R2得到：

$$CF2(H)=CF(H, E2)\times \max\{0, CF(E2)\}$$
$$=0.6\times \max\{0, 0.8\}=0.48$$

- 由R3得到:

$$CF3(H)=CF(H, E3)\times \max\{0,CF(E3)\}$$
$$=-0.5\times \max\{0, 0.6\}=-0.3$$

- 根据结论不确定性的合成算法得到:

$$CF1,2(H)=CF1(H)+CF2(H)- CF1(H)\times CF2(H)$$
$$=0.36+0.48-0.36\times 0.48$$
$$=0.84-0.17=0.67$$

5.4 可信度方法

$$CF_{1,2,3}(H)=\frac{CF_{1,2}(H)+CF_3(H)}{1-\min\{|CF_{1,2}(H)|,|CF_3(H)|\}}$$

$$=\frac{0.67-0.3}{1-\min\{0.67,0.3\}}=\frac{0.37}{0.7}$$

$$=0.53$$

- 这就是所求出的综合可信度，即CF(H)=0.53。

3 确定性方法的说明

1. 可信度的计算问题:

在前面我们已经说明CF的原始定义为: CF=MB-MD

该定义有一个困难之处。因为一个反面的证据的影响可以抑制很多正面证据的影响，反之亦然。例如，如果MB=0.999,MD=0.799,则有CF=0.200

后来,MYCIN中CF的定义修改为

$$CF = \frac{MB - MD}{1 - \min\{MB, MD\}}$$

这样可以削弱一个反面证据对多个正面证据的影响.例如对上面的MB,MD值,有

3 确定性方法的说明

$$CF=\frac{0.999-0.799}{1-\min\{0.999,0.799\}}=0.995$$

- 另外,在MYCIN中,一个规则前提的CF值必须>0.2,这样该规则的前提能认为为真并激活该规则.在CF理论中,0.2这个阈值不是作为一个基本公理,而是作为一个处理方法来减少所激活的仅仅弱支持的规则数目.如果没有这个阈值,许多CF值很小甚至没有值的规则将被激活,这将大大降低系统的效率. ★

3 确定性方法的说明

2. 可信度方法的特点:

优点: (1) 可信度方法具有简洁、直观的优点。通过简单的计算，不确定性就可以在系统中传播，并且计算具有线性的复杂度，推理的近似效果也比较理想。

(2) 可信度方法也很容易理解，并且将不信任和信任清楚地区分开来。

但也有其不足之处：

（1）CF值可能与条件概率得出的值相反。例如：

$P(H1)=0.8$, $P(H2)=0.2$, $P(H1|E)=0.9$, $P(H2|E)=0.8$

则$CF(H1,E)=0.5$, $CF(H2,E)=0.75$.

3 确定性方法的说明

（2）通常：$P(H|E) \neq P(H|S)P(S|E)$

其中S是基于证据E的某些中间假设。但在推理链中的两条规则的CF却是作为独立概率计算的：$CF(H,E)=CF(H,S)CF(S,E)$。

（3）MYCIN一般应用于短推理链，而且假设简单的问题中。如果把该方法应用于不具备短推理链、简单假设的领域，则可能会出问题。

（4）由于可能导致计算的累计误差，如果多个规则逻辑等价于一个规则，则采用一个规则和多个规则计算的CF值可能就不相同。

（5）还有组合规则使用的顺序不同，可能得出不同的结果。

5.4 可信度方法

- 课堂练习
- 在MYCIN中计算CF(H)
  - $R1: C_{11} \wedge C_{12} \wedge C_{13} \Rightarrow H$，CF=0.7；
  - $R2: E_2 \Rightarrow H$，CF=-0.1；
  - $R3: E_3 \Rightarrow H$，CF=0.2；
  - $R4: C_{41} \wedge C_{42} \Rightarrow H$，CF=0.3；

$CF(C_{11})=1$ $CF(C_{12})=0.6$ $CF(C_{13})=0.6$；

$CF(E_2)=1$；

$CF(E_3)=1$；

$CF(C_{41})=0.1$ $CF(C_{42})=0.5$；

提示：注意门槛值

5.4 可信度方法

- 根据R1
  - (1)$C_{11} \wedge C_{12} \wedge C_{13} \Rightarrow H$
  - 规则的可信度：CF=0.7
  - 证据的可信度：
  - $CF(C_{11})=1 \quad CF(C_{12})=0.6 \quad CF(C_{13})=0.6$

$$CF_1(H)=CF(H, C11 \wedge C12 \wedge C13) \times \max\{0, CF(C11 \wedge C12 \wedge C13)\}$$

$$=0.7 \times 0.6=0.42$$

$$CF(C11 \wedge C12 \wedge C13)=\min\{CF(C11), CF(C12), CF(C13)\}=0.6$$

5.4 可信度方法

- 根据R2
  - (2)$E_2 \Rightarrow H$
  - 规则的可信度：CF=-0.1
  - 证据的可信度：
  - $CF(E_2)=1$

$$CF_2(H)=CF(H, E2)\times \max\{0, CF(E2)\} =-0.1 \times 1=-0.1$$

5.4 可信度方法

- 根据R3
  - (3) $E_3 \Rightarrow H$
  - 规则的可信度：CF=0.2
  - 证据的可信度：
  - $CF(E_3)=1$

$$CF_3(H)=CF(H, E3) \times \max\{0, CF(E3)\} =0.2 \times 1=0.2$$

5.4 可信度方法

- 根据R4
  - (4)$C_{41} \wedge C_{42} \Rightarrow H$
  - 规则的可信度：CF=0.3
  - 证据的可信度：
  - $CF(C_{41})=0.1$　　　　$CF(C_{42})=0.5$

$$CF_4(H)=CF(H, C41 \wedge C42) \times \max\{0, CF(C41 \wedge C42)\}$$

$$=0.3 \times 0.1=0.03$$

$$CF(C41 \wedge C42)=\min\{CF(C41), CF(C42)\}=0.1$$

5.4 可信度方法

- MYCIN抑制微弱证据引起的不良影响：
  - 为规则前提指定可信度的门槛值0.2；
  - 前提可信度< 0.2的规则不能激活；
  - 因此，R4不能参与计算

Computer Sc

2、

$$CF_{1,2}(H)=\frac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min[|CF_1(H)|,|CF_2(H)|]}$$

$$=\frac{0.42-0.1}{1-0.1}=0.356$$

$CF_1(H)$、 $CF_2(H)$异号

- (1) $C_{11} \wedge C_{12} \wedge C_{13} \Rightarrow H$， CF=0.7
  - $CF_1(H)=0.42$；
- (2) $E_2 \Rightarrow H$， CF=-0.1
  - $CF_2(H)=-0.1$；
- (3) $E_3 \Rightarrow H$， CF=-0.1
  - $CF_3(H)=0.2$；

CF(H)=0.484

$$CF_{1,2,3}(H)=CF_{1,2}(H)+CF_3(H)-CF_{1,2}(H)\times CF_3(H)$$

$$=0.356+0.2-0.356\times 0.2$$

$$=0.484$$

CF12(H)、 CF3(H)同号，都>0

5.5 证据理论

证据理论 (Theory of Evidence)也称为D-S(Dempster-Shafer)理论。

证据理论(D-S理论)最早是基于德姆斯特(A.P.Dempster)所做的工作，他试图用一个概率范围而不是单个的概率值去模拟不确定性。

5.5 证据理论

莎弗(G.Shafer)进一步拓展了Dempster的工作，这一拓展称为证据推理(Evidential Reasoning)，用于处理不确定性、不精确以及间或不准确的信息。

由于证据理论将概率论中的单点赋值扩展为集合赋值，弱化了相应的公理系统，满足了比概率更弱的要求，因此可看作一种广义概率论。

5.5 证据理论

在证据理论中，引入了信任函数来度量不确定性，并引用似然函数来处理由于“不知道”引起的不确定性，并且不必事先给出知识的先验概率，与主观Bayes方法相比，具有较大的灵活性。因此，证据理论得到了广泛的应用。

同时，可信度可以看作是证据理论的一个特例，证据理论给了可信度一个理论性的基础。

5.5 证据理论

5.5.1 证据的不确定性

在D-S理论中，可以分别用信任函数、似然函数及类概率函数来描述知识的精确信任度、不可驳斥信任度及估计信任度，即可以从各个不同角度刻画命题的不确定性。

D-S理论采用集合来表示命题，先建立命题与集合之间的一一对应关系，把命题的不确定性问题转化为集合的不确定性问题。

5.5 证据理论

5.5.1 证据的不确定性

设Ω为变量x的所有可能取值的有限集合 (亦称样本空间)，且Ω中的每个元素都相互独立，则由Ω的所有子集构成的集合称为幂集，记为2^{Ω} 。

当Ω中的元素个数为N时，则其幂集的元素个数为2^{N}，且其中的每一个元素A都对应于一个关于x的命题，称该命题为“x的值在A中”。

如，用x代表所看到的颜色，Ω={红，黄，蓝}，则A={红}表示“x是红色”；若A={红，蓝}，则表示“x或者是红色，或者是蓝色”。

5.5 证据理论

1. 概率分配函数

定义 设函数m: $2^{\Omega}\rightarrow[0,1]$，且满足

$$m(\phi)=0$$

$$\sum_{A\subseteq\Omega} m(A)=1$$

则称m是2^{Ω}上的概率分配函数，m(A)称为A的基本概率数。

m(A)表示依据当前的环境对假设集A的信任程度。

5.5 证据理论

例子说明

对于上面给出的有限集Ω={红，黄，蓝}，若定义2^{Ω}上的一个基本函数m:

m(φ,{红},{黄},{蓝},{红,黄},{红,蓝},{黄,蓝},{红,黄,蓝})

={0,0.3,0,0.1,0.2,0.2,0.1,0.1}

其中，{0,0.3,0,0.1,0.2,0.2,0.1,0.1}分别是幂集中各个子集的基本概率数。显然m满足概率分配函数的定义。

对概率分配函数的几点说明

（1）概率分配函数的作用是把Ω的任意一个子集都映射为[0,1]上的一个数m(A)。

当A包含于Ω且A由单个元素组成时，m(A)表示对A的精确信任度；

当A包含于Ω、A≠Ω,且A由多个元素组成时，m(A)也表示对A的精确信任度，但却不知道这部分信任度该分给A中哪些元素；

当A=Ω时，则m(A)是对Ω的各个子集进行信任分配后剩下的部分，它表示不知道该如何对它进行分配。

5.5 证据理论

例如

以Ω={红,黄,蓝}为例说明。

当A=｛红｝时，由于m(A)=0.3，它表示对命题“x是红色”的精确信任度为0.3。

当A={红，黄}时，由于m(A)=0.2，它表示对命题“x或者是红色，或者是黄色”的精确信任度为0.2，却不知道该把这0.2分给{红}还是分给{黄}。

当A=Ω={红，黄，蓝}时，由于m(A)=0.2，表示不知道该对这0.2如何分配，但它不属于{红}，就一定属于{黄}或{蓝}，只是基于现有的知识，还不知道该如何分配而已。

5.5 证据理论

概率分配函数的几点说明

（2）m 是 2^{Ω}上而非Ω上的概率分布，所以基本概率分配函数不是概率，它们不必相等，而且m(A)≠1-m(¬A)。

事实上

m({红})+m({黄})+m({蓝})

=0.3+0+0.1=0.4≠1。

2. 信任函数★

定义 信任函数 (Belief Function)

$$Bel: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$$

对任意的 $A \subseteq \Omega$ 有，

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

Bel(A)表示当前环境下，对假设集A的信任程度，其值为A的所有子集的基本概率之和，表示对A的总的信任度。

5.5 证据理论

例---Bel(A)

以Ω={红,黄,蓝}为例说明。

Bel({红,黄})

=m({红})+m({黄})+m({红，黄})

=0.3+0+0.2=0.5。

当A为单一元素组成的集合时,Bel(A)=m(A)。

如果命题“x在B中”成立，必带有命题“x在A中”成立。Bel(A)函数又称为下限函数。

3. 似然函数★

定义 似然函数 (Plausibility Function)

$$Pl:2^{\Omega}\rightarrow[0,1]$$

对任意的 $A\subseteq\Omega$ Pl(A)=1-Bel(┐A)

其中，┐A=Ω-A。

似然函数又称为不可驳斥函数或上限函数。

由于Bel(A)表示对A为真的信任度，Bel(┐A)表示对┐A的信任度，即A为假的信任度，因此，Pl(A)表示对A为非假的信任度。

例---Pl(A)

以Ω={红,黄,蓝}为例说明。

Pl({红})=1-Bel(┐{红})

=1-Bel({黄,蓝})

= 1-(m({黄})+m({蓝})+m({黄,蓝}))

=1-(0+0.1+0.1)=0.8

这里0.8是“红”为非假的信任度。

由于“红”为真的精确信任度为0.3，而剩下的0.8-0.3=0.5，则是知道非假，但却不能肯定为真的那部分。

推论

$$\sum_{\{红\}\cap B\neq\phi} m(B)$$

$=m(\{红\})+m(\{红，黄\})+m(\{红，蓝\})+m(\{红，黄，蓝\})$

$=0.3+0.2+0.2+0.1=0.8$

可见，

$$Pl(\{红\}) = \sum_{\{红\}\cap B\neq\Phi} m(B)$$

该式可推广为

5.5 证据理论

推论★

$$Pl(A)=\sum_{A\cap B\neq\Phi}m(B)$$

因此命题“x在A中”的似然性，由与命题“x在B中”有关的m值确定，其中命题“x在B中”并不会使得命题“x不在A中”成立。

所以一个事件的似然性是建立在对其相反事件不信任的基础上的。

5.5 证据理论

信任函数和似然函数有如下的性质★

(1) Bel(Φ)=0， Bel(Ω)=1,

Pl(Φ)=0， Pl(Ω)=1.

(2) 如果$A \subseteq B$, 则

Bel(A)≤Bel(B),Pl(A)≤Pl(B)。

(3) $\forall A \subseteq \Omega$, Pl(A)≥Bel(A)。

(4)$\forall A \subseteq \Omega$, Bel(A)+Bel(┐A)≤l,

Pl(A)+Pl(┐A)≥1.

5.5 证据理论

信任区间

由于Bel(A)和Pl(A)分别表示A为真的信任度和A为非假的信任度，因此，可分别称Bel(A)和Pl(A)为对A信任程度的下限和上限，记为

下限

A(Bel(A), Pl(A))

上限

Pl(A)-Bel(A)表示既不信任A，也不信任¬A的程度，即对于A是真是假不知道的程度。

5.5 证据理论

信任区间

- 如，在前面的例子中，曾求过Bel({红})=0.3，Pl({红})=0.8，
- 因此有

  {红}（0.3，0.8）

- 它表示对{红}的精确信任度为0.3，不可驳斥部分为0.8，肯定不是{红}的为0.2。

5.5 证据理论

4. 假设集A的类概率函数 *f(A)* ★

$$f(A)=Bel(A)+\frac{|A|}{|\Omega|}(Pl(A)-Bel(A))$$

其中|A|、|Ω|分别表示A和Ω中包含元素的个数。

类概率函数 ***f(A)***也可以用来度量证据**A**的不确定性。

5.5 证据理论

f(A)有如下的性质

- (1) $f(\Phi)=0, f(\Omega)=1$
- (2) $0 \le f(A) \le 1, for\ \forall A \subseteq \Omega$
- (3) Bel(A)≤f(A)≤Pl(A), $\forall A \subseteq \Omega$
- (4) f(¬ A)=1−f(A), $\forall A \subseteq \Omega$

5.5 证据理论

证据E的不确定性

证据E的不确定性可以用类概率函数f(E)表示

原始证据的f(E)应由用户给出，作为中间结果的证据可以由下面的不确定性传递算法确定。

5.5.2 证据的组合函数

在实际问题中，对于相同的证据，由于来源不同，可能会得到不同的概率分配函数。例如，考虑Ω={红，黄}，假设从不同知识源得到的概率分配函数分别为:

m1(φ,{红},{黄},{红,黄})=(0,0.4,0.5,0.1)

m2(φ,{红},{黄},{红,黄})=(0,0.6,0.2,0.2)

在这种情况下，需要对它们进行组合。

5.5 证据理论

正交和概念

- 定义 设m1和m2是两个不同的概率分配函数，则其正交和m= m1⊕m2满足

$$m(\Phi)=0$$

$$m(A)=K^{-1}\times\sum_{x\cap y=A}m_1(x)\times m_2(y)$$

其中:

$$K=1-\sum_{x\cap y=\phi}m_1(x)\times m_2(y)=\sum_{x\cap y\neq\phi}m_1(x)\times m_2(y)$$

5.5 证据理论

注意

- 如果K≠0，则正交和m也是一个概率分配函数；
- 如果K=0，则不存在正交和m，称m1与m2矛盾。

5.5 证据理论

例---正交和

- 设Ω={a, b}，且从不同知识源得到的概率分配函数分别为

$$m1(\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\})=(0,0.3,0.5,0.2)$$

$$m2(\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\})=(0,0.6,0.3,0.1)$$

求正交和$m=m1\oplus m2$。

5.5 证据理论

- 解:先求K

$$K = 1 - \sum_{x \cap y = \phi} m_1(x) \times m_2(y)$$

$$= 1 - \left(m_1(\{a\}) \times m_2(\{b\}) + m_1(\{b\}) \times m_2(\{a\})\right)$$

$$= 1 - (0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.6) = 0.61$$

➢再求m(ф, {a}, {b}, {a, b}), 由于

$$m(\{a\}) = \frac{1}{0.61} \times \sum_{x \cap y = \{a\}} m_1(x) \times m_2(y)$$

$$= \frac{1}{0.61} \times (m_1(\{a\}) \times m_2(\{a\}) + m_1(\{a\}) \times m_2(\{a, b\}) + m_1(\{a, b\}) \times m_2(\{a\}$$

$$= \frac{1}{0.61} (0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6) = 0.54$$

5.5 证据理论

- 同理可得:

  m({b})=0.43 ,

  m({a,b})=0.03

故有

m(φ,{a},{b},{a,b})

=(0, 0.54, 0.43, 0.03)

5.5 证据理论

5. 5. 3 规则的不确定性

具有不确定性的推理规则可表示为:

If E Then H , CF

其中，H为假设，E为支持H成立的假设集，它们是命题的逻辑组合。CF为可信度因子。

H可表示为:$H=\{a_1,a_2,\ldots, a_m\}$, $a_i \in \Omega$ $(i=1,2,\ldots,m)$，H为假设集合Ω的子集。

5.5.3 规则的不确定性

$CF=\{c_1,c_2,\ldots, c_m\}$，$c_i$用来描述前提E成立时ai的可信度。CF应满足如下条件:

(1) $c_i \geq 0$，$1 \leq i \leq m$

(2) $\sum_{i=1}^{m} c_i \leq 1$

5.5.3 规则的不确定性

- 定义 对于不确定性规则:

  If E Then H , CF

定义:

$$m(\{a_i\})=f(E)\cdot c_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

或表示为

$$m(\{a_1\},\{a_2\},\ldots,\{a_m\})$$
$$=(f(E)\cdot c_1,\ f(E)\cdot c_2,\ldots,\ f(E)\cdot c_m)$$

5.5.3 规则的不确定性

- 规定:

$$m(\Omega)=1-\sum_{i=1}^{m} m(\{a_i\})$$

- 而对于Ω的所有其他子集H，均有:m(H)=0。
- 当H为Ω的真子集时，有:

$$Bel(H)=\sum_{B\subseteq H} m(B)=\sum_{i=1}^{m} m(\{a_i\})$$

进一步可以计算Pl(H)和f(H)。

5.5.3 规则的不确定性

- 当规则的前提(证据)E是多个命题的合取或析取时，定义：

$$f(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_n) = \min\{f(E_1), f(E_2), \cdots, f(E_n)\}$$

$$f(E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_n) = \max\{f(E_1), f(E_2), \cdots, f(E_n)\}$$

5.5.4 不确定性的组合

- 当有多条规则支持同一结论时，如果 $H=\{a_1,a_2,\ldots, a_n\}$，则:

  If E_1 Then H, CF_1 $(CF_1=\{c_{11},c_{12},\ldots,c_{1n}\})$

  If E_2 Then H, CF_2 $(CF_2=\{c_{21},c_{22},\ldots,c_{2n}\})$

  ……….

  If E_m Then H, CF_m $(CF_m=\{c_{m1},c_{m2},\ldots,c_{mn}\})$

5.5.4 不确定性的组合

如果这些规则相互独立地支持结论H的成立，可以先计算 $mi(\{a_1\},\{a_2\},\ldots,\{a_n\})=(f(E_i)\cdot c_{i1}, f(E_i)\cdot c_{i2},\ldots, f(E_i)\cdot c_{im})$ $(i=1,2,\ldots,m)$

然后根据前面介绍的求正交和的方法，对这些mi求正交和，以组合所有规则对结论H的支持。一旦累加的正交和m(H)计算出来，就可以计算Bel(H)、Pl(H)、f(H)。

5.5 证据理论

例

- 有如下的推理规则：

R1: If $E_1 \vee (E_2 \wedge E_3)$ Then $A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13}\}$

CF1={0.2，0.3，0.4}

R2: If $E_4 \vee (E_5 \wedge E_6)$ Then $A_2=\{a_{21}\}$

CF2={0.7}

R3: If A_1 Then $A=\{a_1,a_2\}$

CF_3={0.4，0.5}

R4: If A_2 Then $A=\{a_1,a_2\}$

CF_4={0.4，0.4}

5.5 证据理论

- 这些规则形成如图5-7所示的推理网络。
- 原始数据的概率在系统中已经给出：

$f(E_1)=0.5$, $f(E_2)=0.7$, $f(E_3)=0.9$, $f(E_4)=0.9$, $f(E_5)=0.8$, $f(E_6)=0.7$.

假设$|\Omega|=10$，现在需要求出A的确定性f(A)。

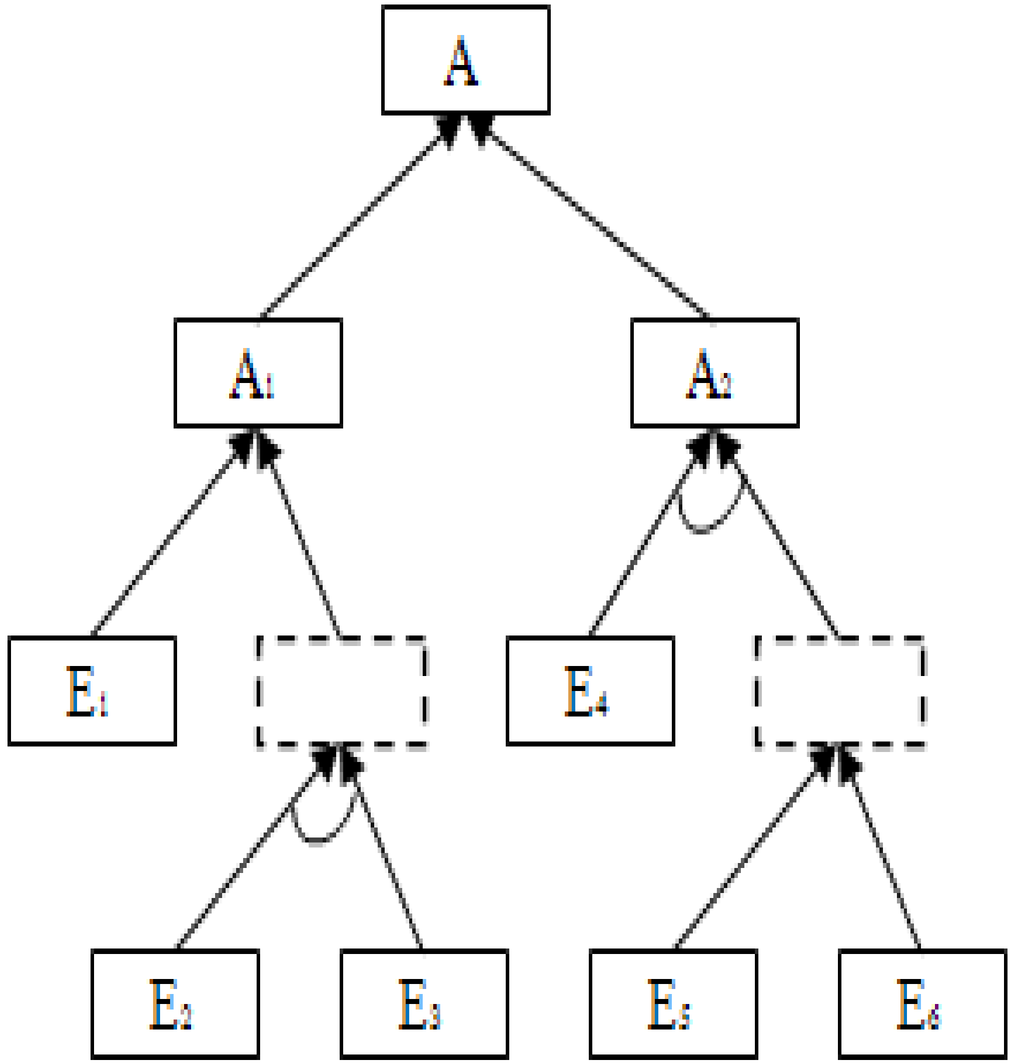


图 5-7 推理网络

5.5 证据理论

- 解：第一步，求A1的确定性。

$$f(E_1 \vee (E_2 \wedge E_3)) = \max\{0.5, \min\{0.7, 0.9\}\} = 0.7$$

$$m_1(\{a_{11}\},\{a_{12}\},\{a_{13}\}) = (0.7\times0.2, 0.7\times0.3, 0.7\times0.4) = (0.14, 0.21, 0.28)$$

$$Bel(A_1) = m_1(\{a_{11}\}) + m_1(\{a_{12}\}) + m_1(\{a_{13}\}) = 0.14 + 0.21 + 0.28 = 0.63$$

$$Pl(A_1) = 1 - Bel(\neg A_1) = 1 - 0 = 1$$

$$f(A_1) = Bel(A_1) + (|A_1| / |\Omega|) \times (Pl(A_1) - Bel(A_1))$$

$$= 0.63 + 3/10 \times (1 - 0.63) = 0.74$$

5.5 证据理论

- 第二步，求A2的确定性。

$$f(E_4 \wedge (E_5 \vee E_6)) = \min\{0.9, \max\{0.8, 0.7\}\} = 0.8$$

$$m_2(\{a_2\}) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

$$Bel(A_2) = m_2(\{a_{21}\}) = 0.56$$

$$Pl(A_2) = 1 - Bel(\neg A_2) = 1 - 0 = 1$$

$$f(A_2) = Bel(A_2) + (|A_2| / |\Omega|) \times (Pl(A_2) - Bel(A_2))$$

$$= 0.56 + 1/10 \times (1 - 0.56) = 0.60$$

5.5 证据理论

- **第三步，求A的确定性。**

根据R3和R4,有:

$m3(\{a1\},\{a2\})=(0.74\times0.4,0.74\times0.5)=(0.30,0.37)$

$m4(\{a1\},\{a2\})=(0.6\times0.4,0.6\times0.4)=(0.24,0.24)$

$m3(\Omega)=1-(m3(\{a1\})+m3(\{a2\}))$

$=1-(0.30+0.37)=0.33$

$m4(\Omega)=1-(m4(\{a1\})+m4(\{a2\}))$

$=1-(0.24+0.24)=0.52$

5.5 证据理论

- 由正交和公式得到 ：

$$K=\sum_{x\cap y\neq\phi} m_3(x)\times m_4(y)$$

$$=m_3(\Omega)\bullet m_4(\Omega)+m_3(\Omega)\bullet m_4(\{a_1\})+m_3(\Omega)\bullet m_4(\{a_2\})+m_3(\{a_1\})\bullet m_4(\Omega)$$

$$+m_3(\{a_1\})\bullet m_4(\{a_1\})+m_3(\{a_2\})\bullet m_4(\Omega)+m_3(\{a_2\})\bullet m_4(\{a_2\})$$

$$=0.33\times0.52+0.33\times0.24+0.33\times0.24+0.3\times0.52$$

$$+0.3\times0.24+0.37\times0.52+0.37\times0.24$$

$$=0.84$$

5.5 证据理论

- 则有 ：

$$m(\{a_1\}) = K^{-1} \bullet (m_3(\Omega) \bullet m_4(\{a_1\}) + m_3(\{a_1\}) \bullet m_4(\Omega) + m_3(\{a_1\}) \bullet m_4(\{a_1\}))$$

$$=1/0.84 \times (0.33 \times 0.24 + 0.30 \times 0.52 + 0.30 \times 0.24) = 0.37$$

$$m(\{a_2\}) = K^{-1} \bullet (m_3(\Omega) \bullet m_4(\{a_2\}) + m_3(\{a_2\}) \bullet m_4(\Omega) + m_3(\{a_2\}) \bullet m_4(\{a_2\}))$$

$$=1/0.84 \times (0.33 \times 0.24 + 0.37 \times 0.52 + 0.37 \times 0.24) = 0.41$$

于是 ：

Bel(A)=m({a1})+m({a2})=0.37+0.41=0.78

Pl(A)=1-Bel(┐A)=1-0=1

f(A)= Bel(A)+(|A|/|Ω|)×(Pl(A)- Bel(A))

=0.78+2/10×(1-0.78)

=0.82

5.5 证据理论

证据理论的优点：

- 证据理论的优点在于能够满足比概率论更弱的公理系统，可以区分不知道和不确定的情况，可以依赖证据的积累，不断缩小假设的集合。

证据理论的不足：

- 证据理论最早是作为经典概率理论的扩展而引入的, 所以受到很多的批评；
- 在证据理论中，证据的独立性不易得到保证；
- 基本概率分配函数要求给的值太多，计算传递关系复杂，随着诊断问题可能答案的增加，证据理论的计算呈指数增长，传递关系复杂，比较难以实现。

5.6 小结

不确定性推理
- 基本概念
  - 不确定推理的基本概念
  - 不确定性推理的分类
  - 不确定性推理的基本问题
- 主要方法
  - 主观*Bayes*方法
  - 可信度方法
  - 证据理论

5.6 小结

- 讨论了不确定性推理的基本概念，
- 不确定性研究的主要问题和主要研究方法。
- 应用这种不确定的事实和知识的推理称为不确定性推理。

不确定性推理中的基本问题

- 1．表示问题
- （1）知识不确定性的表示
- （2）证据的不确定性表示

- 2．计算问题
- （1）不确定性的传递算法
- （2）结论不确定性的合成
- （3）组合证据的不确定性算法

- 3．语义问题
- (1)知识的不确定性度量，需要定义在三个典型情况下的取值。
- (2)对于证据的不确定性度量，需要定义在三个典型情况下的取值。

关于不确定性处理方法（两条路线）：

- 1、在推理一级扩展确定性推理，建立各种不确定性推理的模型。它又分为数值方法和非数值方法。本章主要讨论的是数值方法，如概率方法、主观Bayes方法、可信度方法、证据理论等。
- 2、是在控制一级上处理不确定性，称为控制方法。对于处理不确定的最优方法，现在还没有一个统一的意见。

概率方法

- 概率方法是一个以概率论中有关理论为基础建立的纯概率方法，由于在使用过程中需要事先确定给出先验概率和条件概率，并且计算量较大，因此应用受到了限制。、

主观Bayes方法

- 主观Bayes方法通过使用专家的主观概率，避免了所需的大量统计计算工作。
- 在主观Bayes方法中，讨论了信任与概率的关系，以及似然性问题；介绍了主观Bayes方法知识表示和推理方法。

可信度方法

- 可信度方法比较简单、直观，易于掌握和使用，并且已成功地应用于如MYCIN这样的推理链较短、概率计算精度要求不高的专家系统中。
- 但是当推理长度较长时，由可信度的不精确估计而产生的积累误差会很大，所以它不适合长推理链的情况。

证据理论

- 证据理论是用集合表示命题的一种处理不确定性的理论，它引入信任函数而非概率来度量不确定性，并引入似然函数来处理不知道所引起的不确定性问题，它只需要满足比概率论更弱的公理系统。

证据理论

- 证据理论基础严密，专门针对专家系统，是一种很有吸引力的不确定性推理模型。但如何把它普遍应用于专家系统，目前还没有一个统一的意见。

不足之处

- 尽管这些技术大多数是从实践中总结出来的工程性方法，对不确定性的处理往往不够严格，使用上也有很多局限性，但是它们却能解决一些问题，其结果能够给出令人满意的解释，符合人类认识世界的直觉。